リーマン面に関連する位相幾何学

１９９５年6月１２日〜１６日

於：北海道大学理学部数学教室

予稿集

Series ♯ 36. June, 1995

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.

3: K. Kubota (Ed.), 第12回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.

4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.

5: Y.Giga(Ed.),Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.

6: T.Yoshida (Ed.), 1987年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.

7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何" 研究集会報告集,1988.

8: K. Kubota (Ed.), 第13回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.

9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.

10: I. Nakamura (Ed.), Superstring理論とK3曲面, 91 pages. 1988.

11: Y. Kamishima (Ed.), 1988年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.

12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.

13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987年7月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.

14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989

15: R. Agemi (Ed.), 第14回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.

16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.

17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.

18: A. Arai (Ed.), 1989年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.

19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.

20: R. Agemi (Ed.), 第15回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.

21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.

22: R. Agemi (Ed.), 第16回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.

23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.

24: K. Kubota (Ed.), 第17回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.

25: K. Takasaki, "非線型可積分系の数理" 1992.9.28 〜 10.2 北海道大学での集中講義　講義録, 52 pages. 1993.

26: T. Nakazi (Ed.), 第1回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.

27: K. Kubota (Ed.), 第18回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.

28: T. Hibi (Ed.), 1992年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.

29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第2回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.

30: Y. Giga, Y.-G. Chen (Eds.), 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.

31: K. Kubota (Ed.), 第19回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.

32: T. Ozawa (Ed.), 1993年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.

33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.

34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.

35: S. Miyajima, T. Nakazi (Eds.), 第3回関数空間セミナー報告集, 104 pages. 1995.

リーマン面に関連する位相幾何学

１９９５年6月１２日～１６日

於：北海道大学理学部数学教室

予稿集

はじめに

この予稿集は、科学研究費・総合（A）「位相幾何学の総合的研究」（代表：西田吾郎先生（京大理））の補助により１９９５年６月１２日から１６日まで北海道大学理学部数学教室で行われる研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」に際し、予め各講演者からあつめた原稿をそのまま印刷したものである。
その目的は、参加者が講演への理解を深め、より活発な研究討論を行う一助とするとともに、記録として残すことによって後々の研究に役立てることにある。
この研究集会の開催は、西田先生はじめ多くの方々のご理解ご協力、さらに北海道大学理学部数学教室各位のご支援の上に成り立っていることを付記させていただく。

１９９５年5月

河澄響矢（北大理）

目次 (配列は講演者の氏名の５０音順による。)

Ｊｏｈｎｓｏｎ準同型とガロア理論

朝田衛、中村博昭、高尾尚武

この講演では、タイヒミュラー群の重みによるフィルターづけと、付随する次数リー環の大きさの評価の問題について、主に数論サイドからの進展について紹介を行います。
問題の次数商加群はＪｏｈｎｓｏｎ準同型によりあるＳｐ（２ｇ）加群に代数的に埋め込まれますが、その像の大きさは完全にはまだ同定されていません。森田茂之氏や織田孝幸氏を中心とするグループの人々の仕事により、
（１）次数の低い部分の様子
（２）像の下からの評価
（３）像の上からの評価
などについて部分的な結果が知られています。
ここではＧａｌ（$\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$）の適当なフィルターづけによる次数商がＪｏｈｎｓｏｎ準同型の像を制限する様子について説明します。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝　メモ　＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

An Estimate of the Number of Non-constant Holomorphic Maps between Riemann Surfaces

大阪市立大学理学部　　今吉洋一
(1995/6/14)

閉リーマン面 R, S に対し、R から S への定数でない正則関数達の個数を評価する問題を考察する。

次の状況で考える。

閉リーマン面 R, S の種数を $g(R), g(S)$ とするとき、 $g(R) \geqq g(S) \geqq 2$ とする。R から S への定数でない正則関数全体の集合を $\mathrm{Hol}(R, S)$ と書く。R の普遍被覆変換群を Γ とし、Γ は単位円板 Δ に作用するフックス群とみなす。したがって、$R = \Delta/\Gamma$ である。一方、リーマン面 S は、複素平面内の有界領域 D に properly discontinuous に作用するクライン群 G によって $S = D/G$ と表せるものとする。ただし、G は D 内に固定点はないとする。任意の正則写像 $\varphi\colon \Delta/\Gamma \to D/G$ に対し、モノドロミー定理から、 φ の持ち上げ$\tilde{\varphi}\colon \Delta \to D$ が存在する。このとき、群の準同型 $\tilde{\varphi}_*\colon \Gamma \to G$ が

$$\tilde{\varphi} \circ \gamma = \tilde{\varphi}_*(\gamma) \circ \tilde{\varphi} \qquad \text{for any } \gamma \in \Gamma.$$

によって定義される。この $\tilde{\varphi}_*$ を $\tilde{\varphi}$ の定めるモノドロミーと呼ぶ。

次の剛直性定理が以下の議論の基本になる（［2］を参照）。

Rigidity Theorem. 定数でない正則写像 $\varphi, \psi\colon \Delta/\Gamma \to D/G$ が同じモノドロミー $\tilde{\varphi}_* = \tilde{\psi}_*\colon \Gamma \to G$ を定めれば $\varphi = \psi$ となる。

この定理は、定数でない正則写像 φ は位相的な情報 φ_* で決定されることを意味し、$\mathrm{Hol}(R, S)$ の個数を評価するには、どの程度の量的なデータから φ_* が決まるかがわかればよいことになる。

次の結果が得られた。

Theorem. リーマン面 R, S の種数のみに依存する定数によって $\mathit{Hol}(R, S)$ の個数は上から評価される。

この定理の証明は、リーマン面のモデュライ空間（タイヒミュラー空間）、双曲幾何、クライン群を用いて、剛直性定理に帰着することによってなされる。そして、$\mathrm{Hol}(R, S)$ の個数を評価する定数は双曲幾何を用いて具体的に計算できる量である。

$\mathrm{Hol}(R, S)$ の個数評価に対する結果には Howard-Sommese [1] と田辺 [5] がある。 ここでの方法は、Severi の定理 [3], 関数体における Mordell 予想 とShafarevich 予想 [4] における個数評価にも適用できる。さらに、リーマン面は解析的に有限型のものでもよい。

References

1. A. Howard and A. J. Sommese, *On the theorem of de Franchis*, Ann. Scoula. Norm. Sup. Pisa **10** (1983), 429-436.
2. Y. Imayoshi, *Generalizations of de Franchis theorem*, Duke Math. J. **50** (1983), 393-408.
3. Y. Imayoshi, *An analytic proof of Severi's theorem*, Complex Variables **2** (1983), 151-155.
4. Y. Imayoshi and H. Shiga, *A finiteness theorem of holomorphic families of Riemann surfaces*, Holomorphic Functions and Moduli, 1986 MSRI Conference, Vol. II, pp. 207-219, Drasin, D. et al. (eds.), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988.
5. M. Tanabe, *On rigidity of holomorphic maps of Riemann surfaces*, to appear.

PSU(1,1)-representations of the genus 2 surface group with small Euler numbers

岡井孝行

§0. Preliminaries

Σ_g : closed oriented surface of genus $g \geq 2$

$\pi_1(\Sigma_g) = \langle \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g \mid \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = 1 \rangle$

$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} (= (a\,;b)\ と略記) \in SL(2,\mathbb{C}) \right\} \ni (a\,;b)$

$\downarrow$

$PSU(1,1) = SU(1,1)/\{\pm I\} = \mathrm{Isom}_+(\text{Poincaré disk}) \ni [a\,;b]$

$R_g = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), PSU(1,1))/\text{conj.}$ with compact-open topology.

Facts. $\rho : \pi_1(\Sigma_g) \longrightarrow PSU(1,1)$ の Euler number $e(\rho)$ (i.e. the primary obstruction to have a section on the $PSU(1,1)$-bundle associated to $\begin{matrix}\tilde{\Sigma}_g \\ \downarrow \pi_1(\Sigma_g) \\ \Sigma_g\end{matrix}$ via ρ) に対して

(1). $-(2g-2) \leq e(\rho) \leq 2g-2$ (Milnor-Wood inequality)

(2) (Goldman) $\forall n \in [-(2g-2), 2g-2] \cap \mathbb{Z}$ に対して $e^{-1}(n)$ が R_g の connected components.

$e = \pm(2g-2)$ の components $\longleftrightarrow$ faithful & discrete representations $\longleftrightarrow \pm \mathcal{T}_g$

(3) (Hitchin) $e \neq 0$ の各 component は smooth であり, $S^{2g-2-|e|}(\Sigma_g)$ 上のある rank $g-1+|e|$ の complex vector bundle の total space と同一視される.

$g=2$, $|e|=1$ のときは特に $\Sigma_2 \times \mathbb{R}^4$ と diffeo.

以下 $\boxed{g=2}$ の場合を考える.

Aim : R_2 の元 $[\rho]$ を mod. conj. で全て「求める」

i.e. 方程式 $[\rho(\alpha_1), \rho(\beta_1)][\rho(\alpha_2), \rho(\beta_2)] = I$ の解 ρ をいくつかの cases に分割して (mod. conj. で) 全て求め, それらの R_2 での「つながり具合」を調べる.

Observations ◦ $[\rho(\alpha_i), \rho(\beta_i)]$ は $SU(1,1)$ の元として well-defined.

◦ $SU(1,1)$ の各元 は $SU(1,1)$ 内で 次のいずれかに conjugate：

$$\pm I, \quad \underset{\text{(elliptic)}}{(e^{i\theta}; 0) \ (\sin\theta \neq 0)}, \quad \underset{\text{(parabolic)}}{\pm(1 \pm i; \pm i)}, \quad \underset{\text{(hyperbolic)}}{\pm(ch(\ell); sh(\ell)) \ (\ell \neq 0)}$$

◦ $\exists \alpha, \beta \in SU(1,1)$ with $[\alpha, \beta] = -I$.

◦ $|e(\rho)|$: odd (resp. even) $\Longleftrightarrow$ $\rho(\gamma)$ の $SU(1,1)$ への勝手な lift を $\widetilde{\rho(\gamma)}$ とするとき
$\prod_{i=1}^{2} [\widetilde{\rho(\alpha_i)}, \widetilde{\rho(\beta_i)}] = -I$ (resp. I) $\in SU(1,1)$.

従って 次の方程式の 解 (α, β) (in $SU(1,1)$) を 2つ組み合せて，積が $-I$ (resp. I) なるものが $|e| = 1$ (resp. $|e| = 0, 2$) の representations を与える (mod. conj. ではこれで全て)：

(E) $[\alpha, \beta] = (e^{i\theta}; 0)$, $\quad ([\alpha, \beta] = -(e^{i\theta}; 0)^{-1} = (e^{i(\pi-\theta)}; 0))$

(P.1) $[\alpha, \beta] = (1 \pm i; \pm i)$, (P.2) $[\alpha, \beta] = -(1 \pm i; \pm i)^{-1}$

(H.1) $[\alpha, \beta] = (ch(\ell); sh(\ell))$, (H.2) $[\alpha, \beta] = -(ch(\ell); sh(\ell))^{-1}$

$[\alpha, \beta] = I$.

§1. Result of calculations.

Th. (E) $\alpha, \beta \in SU(1,1)$ satisfy $[\alpha, \beta] = (e^{i\theta}; 0)$ with $\sin\theta \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \left(R(1 + i\tan(\tfrac{\theta}{2})); \ \left(\left(\tfrac{R}{\cos(\frac{\theta}{2})}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}\right) \\ \beta = \left(U(1 - i\tan(\tfrac{\theta}{2})); \ \left(\left(\tfrac{U}{\cos(\frac{\theta}{2})}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi}\right) \end{cases}$$

with $(*)_E$: $RU\sin(\tfrac{\theta}{2}) = (R^2 - (\cos(\tfrac{\theta}{2}))^2)^{\frac{1}{2}} (U^2 - (\cos(\tfrac{\theta}{2}))^2)^{\frac{1}{2}} \sin(\varphi - \psi - \tfrac{\theta}{2})$,

where $R, U, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$, $\quad |R|, |U| \geq |\cos(\tfrac{\theta}{2})|$.

Cor. $\alpha, \beta \in SU(1,1)$ satisfy $[\alpha, \beta] = (e^{i\theta}; 0)$ with $\sin\theta \neq 0$

$\Longrightarrow |\mathrm{tr}\,\alpha|, \ |\mathrm{tr}\,\beta| > 2$.

Th. (P.1). $\alpha, \beta \in SU(1,1)$ satisfy $[\alpha, \beta] = (1+i\,;\, i)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = (q + ir\,;\, \varepsilon(q^2-1)^{\frac{1}{2}} + ir) \\ \beta = (s + it\,;\, \delta(s^2-1)^{\frac{1}{2}} + it) \end{cases}$$

with $(*)_P$: $(q + \varepsilon(q^2-1)^{\frac{1}{2}})(s + \delta(s^2-1)^{\frac{1}{2}}) + 2(\varepsilon(q^2-1)^{\frac{1}{2}} t - \delta(s^2-1)^{\frac{1}{2}} r) = 0$,

where $q, r, s, t \in \mathbb{R}$, $|q|, |s| \geq 1$, $\varepsilon, \delta = \pm 1$.

Th. (P.2). $\alpha, \beta \in SU(1,1)$ satisfy $[\alpha, \beta] = -(1+i\,;\, i)^{-1}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \left(\frac{p}{2} + i\left(\frac{3}{8}p + \frac{r^2}{8p} + \frac{1}{2p}\right);\ \frac{r}{2} + i\left(-\frac{5}{8}p + \frac{r^2}{8p} + \frac{1}{2p}\right)\right) \\ \beta = \left(\frac{s}{2} - i\left(\frac{3}{8}s + \frac{u^2}{8s} + \frac{1}{2s}\right);\ \frac{u}{2} + i\left(\frac{5}{8}s - \frac{u^2}{8s} - \frac{1}{2s}\right)\right) \end{cases}$$

with $(**)_P$: $4(p^2 + s^2) + (pu + rs)^2 + 2ps(pu + rs) = 0$,

where $p, r, s, u \in \mathbb{R}$, $p, s \neq 0$.

Cor. $\alpha, \beta \in SU(1,1)$ satisfy $[\alpha, \beta] = -(1+i\,;\, i)^{-1} \Longrightarrow |\mathrm{tr}\,\alpha|, |\mathrm{tr}\,\beta| > 2$.

Th. (H.1). $\alpha, \beta \in SU(1,1)$ satisfy $[\alpha, \beta] = (\mathrm{ch}(l)\,;\, \mathrm{sh}(l))$ with $l \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = (R + iX\,;\, \mathrm{th}(\frac{l}{2})R + i\tilde{X}) \\ \beta = (U + iY\,;\, -\mathrm{th}(\frac{l}{2})U + i\tilde{Y}) \end{cases}$$

with $(*)_H$: $\dfrac{RU}{\mathrm{ch}(\frac{l}{2})^2} = (XY - \tilde{X}\tilde{Y}) + \coth(\frac{l}{2})(\tilde{X}Y - X\tilde{Y})$,

where $R, U, X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y} \in \mathbb{R}$ are of the following forms according to cases

(I) $|X| > |\tilde{X}|$, (II) $|X| = |\tilde{X}|$, (III) $|X| < |\tilde{X}|$,

(I)′ $|Y| > |\tilde{Y}|$, (II)′ $|Y| = |\tilde{Y}|$, (III)′ $|Y| < |\tilde{Y}|$:

(I): $\alpha = \left(r + i\varepsilon_1\left(1 - \left(\frac{r}{\mathrm{ch}(\frac{l}{2})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{ch}(x)\,;\ \mathrm{th}(\frac{l}{2})r + i\left(1 - \left(\frac{r}{\mathrm{ch}(\frac{l}{2})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{sh}(x)\right)$

(I)′: $\beta = \left(u + i\varepsilon_3\left(1 - \left(\frac{u}{\mathrm{ch}(\frac{l}{2})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{ch}(y)\,;\ -\mathrm{th}(\frac{l}{2})u + i\left(1 - \left(\frac{u}{\mathrm{ch}(\frac{l}{2})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{sh}(y)\right)$

(II): $\alpha = (\varepsilon_1 \mathrm{ch}(\frac{l}{2}) + ix\,;\ \varepsilon_1 \mathrm{sh}(\frac{l}{2}) + i\varepsilon_2 x)$

(II)′: $\beta = (\varepsilon_3 \mathrm{ch}(\frac{l}{2}) + iy\,;\ -\varepsilon_3 \mathrm{sh}(\frac{l}{2}) + i\varepsilon_4 y)$

(III): $\alpha = \left(r + i\left(\left(\frac{r}{ch(\frac{l}{2})}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} sh(x) \ ; \ th(\tfrac{l}{2})\, r + i\varepsilon_2\left(\left(\frac{r}{ch(\frac{l}{2})}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} ch(x)\right)$

(III)$'$: $\beta = \left(u + i\left(\left(\frac{u}{ch(\frac{l}{2})}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} sh(y) \ ; \ -th(\tfrac{l}{2})\, u + i\varepsilon_4\left(\left(\frac{u}{ch(\frac{l}{2})}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} ch(y)\right)$

with $\varepsilon_i = \pm 1$, $r, u, x, y \in \mathbb{R}$ and $\left|\frac{r}{ch(\frac{l}{2})}\right|, \left|\frac{u}{ch(\frac{l}{2})}\right| > 1$ or < 1
according to (I), (I)$'$ or (III), (III)$'$.

Th. (H.2). $\alpha, \beta \in SU(1,1)$ satisfy $[\alpha, \beta] = -(ch(l) \, ; \, sh(l))^{-1}$ with $l \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \left(R + i\varepsilon_1\left(1 + \left(\frac{R}{sh(\frac{l}{2})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} ch(x) \ ; \ -coth(\tfrac{l}{2})\, R + i\left(1 + \left(\frac{R}{sh(\frac{l}{2})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} sh(x)\right) \\ \beta = \left(U + i\varepsilon_3\left(1 + \left(\frac{U}{sh(\frac{l}{2})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} ch(y) \ ; \ coth(\tfrac{l}{2})\, U + i\left(1 + \left(\frac{U}{sh(\frac{l}{2})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} sh(y)\right) \end{cases}$$

with $(**)_H$: $RU\, ch(\frac{l}{2}) = -\varepsilon_1\varepsilon_3 \left(R^2 + (sh(\tfrac{l}{2}))^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(U^2 + (sh(\tfrac{l}{2}))^2\right)^{\frac{1}{2}} ch\left(\frac{l}{2} - \varepsilon_1 x + \varepsilon_3 y\right)$,
where $R, U, x, y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

Cor. $\alpha, \beta \in SU(1,1)$ satisfy $[\alpha, \beta] = -(ch(l) \, ; \, sh(l))^{-1}$ with $l \neq 0$
$\Longrightarrow |tr\,\alpha|, |tr\,\beta| > 2$.

§2. Characterization of the Teichmüller space $\mathcal{T}_2$.

Th. $\rho : \pi_1(\Sigma_2) \longrightarrow PSU(1,1)$ satisfy $|e(\rho)| = 2$
$\Longleftrightarrow {}^{\exists} P \in PSU(1,1)$, $0 \neq {}^{\exists} l \in \mathbb{R}$
s.t. $[P\rho(\alpha_1)P^{-1}, \ P\rho(\beta_1)P^{-1}] = -(ch(l) \, ; \, sh(l))^{-1}$
$[P\rho(\alpha_2)P^{-1}, \ P\rho(\beta_2)P^{-1}] = -(ch(-l) \, ; \, sh(-l))^{-1}$
where both $P\rho(\alpha_1)P^{-1}$ and $P\rho(\alpha_2)P^{-1}$ satisfy "$sign(R\varepsilon_1) = +1$" (or -1) in Th. (H.2).

Remark. この表示から mod. conj. の分をけずって $\mathcal{T}_2 \simeq \mathbb{R}^6$ を導くことは easy.

§3. Representations with $[\rho(\alpha_1), \rho(\beta_1)] = I = [\rho(\alpha_2), \rho(\beta_2)]$.

$R_I = \{\rho : \pi_1(\Sigma_2) \longrightarrow PSU(1,1) \mid [\rho(\alpha_1), \rho(\beta_1)] = I = [\rho(\alpha_2), \rho(\beta_2)]\}/_{\text{conj.}}$ $(\subset R_2)$ の topology を調べる.

∘ Iwasawa decomposition of $PSU(1,1)$

$K = \{[e^{i\theta}; 0] ; \theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\}$, $N = \{[1+ir; ir] ; r \in \mathbb{R}\}$, $A = \{[\mathrm{ch}(\ell); \mathrm{sh}(\ell)] ; \ell \in \mathbb{R}\}$
(an elliptic 1-parameter family) (parabolic) (hyperbolic)

$PSU(1,1) = KNA$, $\quad aNa^{-1} = N \quad (\forall a \in A)$.

Fact. (Johnson-Millson). conj. で変換して $\mathrm{Im}\,\rho \subset K$, or NA. とできない $\Longrightarrow$ $[\rho]$: smooth point.

☆ $\mathrm{Im}\,\rho \subset K$ とできるときには singularity が, $\mathrm{Im}\,\rho \subset NA$ とできるときには non-Hausdorffness が生じることがあとで分かる.

∘ $PSU(1,1)$ による conjugations.

Prop. $P \in PSU(1,1)$ とする.

(1) $\theta_1, \theta_2 \in (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ に対して $P[e^{i\theta_1}; 0]P^{-1} = [e^{i\theta_2}; 0] \iff \theta_1 = \theta_2$ かつ $P \in K$.

(2) $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $P[1+ir_1; ir_1]P^{-1} = [1+ir_2; ir_2]$

$$\iff \exists \ell \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R} \text{ s.t. } r_2 = r_1 e^{-2\ell}$$
かつ $P = [\mathrm{ch}(\ell) + ib ; \mathrm{sh}(\ell) + ib] \eqqcolon P(\ell, b)$.

(注. $\{P(\ell, b) ; \ell, b \in \mathbb{R}\} = AN$)

(3) $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $P[\mathrm{ch}(\ell_1); \mathrm{sh}(\ell_1)]P^{-1} = [\mathrm{ch}(\ell_2); \mathrm{sh}(\ell_2)]$

$\iff$ (i) $\ell_1 = \ell_2$ かつ $P \in A$

or (ii) $\ell_1 = -\ell_2$ かつ $\exists t \in \mathbb{R}$. s.t. $P = [i\,\mathrm{ch}(t); i\,\mathrm{sh}(t)] \eqqcolon Q(t)$

(注. $Q(t) = [\mathrm{ch}(\frac{t}{2}); \mathrm{sh}(\frac{t}{2})]^{-1} [i; 0] [\mathrm{ch}(\frac{t}{2}); \mathrm{sh}(\frac{t}{2})]$.)

Cor. $I \neq Z \in PSU(1,1)$ を fix.

このとき「$P \in PSU(1,1)$ が $PZP^{-1} = Z$ をみたす」$\iff$「P は Z と同じ 1-parameter family に入る」

従って $R_I \ni [\rho]$ は $\left.\begin{matrix}(\rho(\alpha_1), \rho(\beta_1)) \text{ を含む 1-parameter family} \\ (\rho(\alpha_2), \rho(\beta_2)) \quad 〃 \end{matrix}\right)$ により 次の 9 通りに分類される：

$(\rho(\alpha_2), \rho(\beta_2))$ \ $(\rho(\alpha_1), \rho(\beta_1))$	elliptic $(\lvert tr\rvert<2)$	parabolic $(\lvert tr\rvert=2)$	hyperbolic $(\lvert tr\rvert>2)$
elliptic	(E − E)	(P − E)	(H − E)
parabolic	(E − P)	(P − P)	(H − P)
hyperbolic	(E − H)	(P − H)	(H − H).

この各々の subsets を $R_{(E\text{-}E)}$, ···, $R_{(H\text{-}H)}$ と書き これらの topologies を調べる：

<u>Th. (E−E).</u> $R_{(E\text{-}E)}$ has a description $\left((T^2 \setminus \{p_0\}) \times \left[(T^2 \setminus \{p_0\}) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \amalg \{p_0\}\right]\right) \amalg (\{p_0\} \times T^2)$.

<u>Th. (E−P).</u> $R_{(E\text{-}P)}$ has a description $((T^2 \setminus \{p_0\}) \times \mathbb{R}^2) \amalg (\{p_0\} \times (S^1 \amalg \{0\}))$.

<u>Th. (E−H).</u> $R_{(E\text{-}H)}$ has a description $((T^2 \setminus \{p_0\}) \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R})) \amalg (\{p_0\} \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^1))$

(here, $\mathbb{R}P^1 \times_{\mathbb{Z}_2} F$ denotes an F-bundle associated to the non-trivial principal $\mathbb{Z}_2$-bundle over $\mathbb{R}P^1$).

<u>Th. (P−E).</u> $R_{(P\text{-}E)}$ has a description $(S^1 \times [((T^2 \setminus \{p_0\}) \times \mathbb{R}) \amalg \{p_0\}]) \amalg (\{0\} \times T^2)$.

<u>Th. (P−P).</u> $R_{(P\text{-}P)}$ has a description $(S^1 \times ((\mathbb{R}^2 \amalg \mathbb{R}^2)/\sim)) \amalg (\{0\} \times (S^1 \amalg \{0\}))$,

where for $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \sim y \iff x = y = 0$.

<u>Th. (P−H).</u> $R_{(P\text{-}H)}$ has a description $(S^1 \times [(\mathbb{R}^2 \amalg (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}))/\sim]) \amalg (\{0\} \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^1))$,

where for $x \in \mathbb{R}^2$ and $(y, \tau) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $x \sim (y, \tau) \iff x = y = 0$.

Th. (H-E). $R_{(H-E)}$ has a description

$$\Big(\big[\mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}) \setminus \{c_0\}\big] \times (T^2 \setminus \{p_0\})\Big) \amalg \Big(\big(\mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^1) \setminus \{c_0\}\big) \times \{p_0\}\Big) \amalg \big(\{c_0\} \times T^2\big),$$

where c_0 denotes the cone point.

Th. (H-P). $R_{(H-P)}$ has a description

$$\Big(\mathrm{Cone}\big\{(\mathbb{R}P^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2) \times \big[\big((\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}_+\big) \amalg (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\big]\big\} \setminus \{c_0\}\Big) \amalg \Big(\mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^1 \times \{0\}) \setminus \{c_0\}\Big) \amalg \big(\{c_0\} \times (\mathbb{R}^2/\mathbb{R}_+)\big).$$

Th. (H-H). $R_{(H-H)}$ has a description

$$\Big(\mathrm{Cone}\big\{\big[(\mathbb{R}P^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2) \times L(D_0) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\big] \amalg \big[\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\big] \amalg \big[\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}^2\big]\big\} \setminus \{c_0\}\Big) \amalg \big(\{c_0\} \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^1)\big),$$

where $L(D_0) = (\mathbb{R}_{\geq 0} \amalg \mathbb{R}_{\geq 0})/\sim$ with $x \sim y \iff x>0,\ y>0$ and $x=y$.

References.

- W. M. Goldman: Topological components of spaces of representations, Invent. Math. 93 (1988), 557–607.
- N. J. Hitchin: The self-duality equations on a Riemann surface, Proc. London Math. Soc. (3) 55 (1987), 59–126.
- D. Johnson and J. J. Millson: Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, In: Discrete Groups in Geometry and Analysis, Papers in Honor of G. D. Mostow on His Sixtieth Birthday, R. Howe (ed.), Progress in Math. 67, pp. 48–106, Birkhäuser 1987.
- T. Okai: $PSU(1,1)$-representations of the genus 2 surface group with Euler number 1, preprint.
- T. Okai: Space of $PSU(1,1)$-representations of the genus 2 surface group with vanishing commutators, preprint.

リーマン面上の射影接続の
モジュライのシンプレクティック構造

河井 真吾（京大数理研）

今回の研究の目標は，複素構造をかえながら動くリーマン面上の微分方程式（正確には，正則または有理形の射影接続）のモジュライの上に定義される自然な（退化した）シンプレクティック構造の性質を明きらかにすることである。このような問題意識の背景にあるのは，複素領域における線形常微分方程式のモノドロミー保存変形の理論である。今世紀初めに，R. Fuchs, R. Garnier の両氏は，リーマン球面 $\mathbf{P}^1$ 上の２階の線形常微分方程式のモノドロミー保存変形を考察して，変形方程式としてパンルヴェ方程式 I–VI を導出した。岡本和夫氏は，１９７０年代に入り，リーマン面がトーラス（種数＝１）の場合にこれと同様の考察を行って，パンルヴェ方程式の一つの一般化を得る一方で（[8]–[10]），$\mathbf{P}^1$ 上での２階の方程式のモノドロミー保存変形が，変形のパラメーターに関する可積分ハミルトン系として記述されるという重要な事実を見出した（[11]）。（後にこれはトーラス上での場合にも同氏によって確かめられた。[12], [13] を参照。）この事実を，一般の種数のリーマン面に対して示したのは岩崎克則氏である。彼は閉リーマン面上のフックス型の有理形射影接続のモジュライを実際に構成し，適当な座標をとることによって，モノドロミー保存変形をラグランジアン葉層として記述するような閉２形式を具体的にかき下すことに成功した（[4]）。我々にとって最も重要な方法論的出発点となったのは，同じく岩崎氏によって示された，次の事実である（[5]）。

定理（岩崎）: 上述の閉２形式は，（特異点に対応する）点を抜いたリーマン面の基本群の表現類の空間（ただし抜いた点のまわりの局所的な表現は固定されているとする）の上に定義される自然なシンプレクティック形式の，モノドロミー写像による引き戻しにちょうど一致する。

実際，シンプレクティック形式は非退化であるから，（もしモノドロミー写像が微分のレベルで全射であれば），引き戻しによって得られた閉２形式は完全にモノドロミー保存変形を記述することになる。これにより我々は，

《微分方程式のパラメーターの空間の上にモノドロミー写像を通じて
定義される（退化した）シンプレクティック構造を調べることにより
モノドロミー保存変形を考察する》

という基本的原理を得ることになったのである。

これらの研究の成果をふまえて，我々は扱う状況をさらに一般にして，リーマン面の複素構造をも動かしながら微分方程式のモノドロミー保存変形を考察することを次の目標とした。まず，リーマン面がトーラスの場合に得られた結果について簡単にふれておく。X を種数 1 の閉リーマン面，H を上半平面としよう。$\tau \in H$ をとり，$X = \mathbf{C}/\mathbf{Z}\cdot 1 \oplus \mathbf{Z}\cdot\tau$ と表せば，X 上の方程式は $\mathbf{C}$ 上の方程式であって係数が二重周期関数となるものとして表現される。

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = Q(z)\,y\,,$$

$$Q(z) = k + \sum_{i=1}^{m}\Big\{ H_i\,\zeta(z-t_i\,,\tau) + \frac{1}{4}(\theta_i^2-1)\,\wp(z-t_i\,,\tau)\Big\},\quad \sum_{i=1}^{m} H_i = 0$$

なる形の方程式は，$z \equiv t_i \pmod{\mathbf{Z}\cdot 1 \oplus \mathbf{Z}\cdot\tau}$ に確定特異点（特性指数の差は θ_i）をもつフックス型方程式であり，

$$k \in \mathbf{C};\ H_i \in \mathbf{C}\ \Big(\sum_{i=1}^{m} H_i = 0\Big);\ t_i \in \mathbf{C};\ \tau \in H$$

によってパラメトライズされる。ここで，$\theta_i \in \mathbf{C}$ は定数とみなすこととし，特異点 $z \equiv t_i$ は対数的でないとする。また，$\zeta(z,\tau)$, $\wp(z,\tau)$ は基本周期 $1, \tau$ のワイエルシュトラスの ζ- 関数, $\wp$- 関数であり，

$$\zeta(z+1,\tau) - \zeta(z,\tau) = \eta_1(\tau)$$
$$\zeta(z+\tau,\tau) - \zeta(z,\tau) = \eta_2(\tau)$$

とする。このとき，方程式 (1) のモノドロミー保存変形を記述する閉 2 形式の具体的な形として次を得た（[6]）。

定理 1: 求める閉 2 形式は次のように表される。

$$(2)\quad 2\sum_{i=1}^{m} dH_i\wedge dt_i + \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\,dk\wedge d\tau - \frac{\eta_1(\tau)}{\pi\sqrt{-1}}\sum_{i=1}^{m}(t_i\,dH_i\wedge d\tau + H_i\,dt_i\wedge d\tau).$$

2 形式 (2) が閉形式となることは，第 3 項を $-\frac{\eta_1(\tau)}{\pi\sqrt{-1}}\sum_{i=1}^{m} d(H_i\,t_i)\wedge d\tau$ とかき直すことによりすぐわかる。また，この 2 形式が方程式 (1) のパラメーターの自然な変換で不変となることも確かめられた。さらに (2) の形から，もし方程式 (1) のモノドロミー保存変形を固定されたトーラスの上で考えれば，得られる閉 2 形式は

$$2\sum_{i=1}^{m} dH_i\wedge dt_i$$

となることもわかる。実際，これは岡本氏と岩崎氏によって既に得られていたものと一致している。

以上の結果を一般の種数のリーマン面上での場合に拡張することが次の目標である。（ただし特異点は考えないことにする。）トーラス上で考える場合には，微分方程式を具体的に表示することができたので，求める閉２形式も明示的にかき下すことができた。しかし今回は，より間接的な方法で《微分方程式のモジュライ》を考察することになる。X を種数 $g \geq 2$ の閉リーマン面，H を先と同様に上半平面としよう。一意化定理によりフックス群 Γ をとって，$X = H/\Gamma$ と表すことができる。すると，リーマン面 X 上の（正則）射影接続の全体は，H 上の Γ に関する正則二次微分全体のなすベクトル空間 $A_2(H,\Gamma)$ と同一視されることになる。$q \in A_2(H,\Gamma)$ に対して，H 上での方程式

$$(3) \qquad S(f) = q \qquad (\,S(f)\text{ は }f\text{ のシュワルツ微分を表す}\,)$$

の任意の解 f は，H からリーマン球面 $\mathbf{P}^1$ への局所双正則写像となり，

$$f(\gamma z) = \rho(\gamma) f(z) \qquad (\,\gamma \in \Gamma\,,\, z \in H\,)$$

によって準同型 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ を定める。(3) の解の一般形は $A \circ f$ $(A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbf{C}))$ と表され，対応する準同型は $\gamma \mapsto A\rho(\gamma)A^{-1}$ の形であるから，各 $q \in A_2(H,\Gamma)$ に対して表現 $\Gamma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ の共役類が一つ定まることになる。これが二次微分 q の（または q に対応する X 上の射影構造の）モノドロミーにほかならない。

次に，リーマン面 X の複素構造を動かして考えるために，（標識付き）フックス群 Γ のタイヒミュラー空間 $T(\Gamma)$ と普遍タイヒミュラー曲線 $\pi\colon V(\Gamma) \to T(\Gamma)$ を導入しよう。各 $\tau \in T(\Gamma)$ に対して，擬半平面 H_τ と擬フックス群 Γ_τ が対応し，射影 π の τ 上のファイバーは τ の表す標識付きリーマン面 H_τ/Γ_τ となる。各 τ に対して，H_τ 上の Γ_τ に関する正則二次微分全体を $A_2(H_\tau,\Gamma_\tau)$ とすれば，これらの全体は正則ベクトル束 $Q \to T(\Gamma)$ を形成し，したがって全空間 Q は複素構造をかえながら動くリーマン面上の射影接続のモジュライとみなされることになる。さらに，各 $q \in A_2(H_\tau,\Gamma_\tau)$ が表現 $\Gamma_\tau \to \mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ の共役類を一つ定めることから，結局モノドロミー写像

$$F\colon Q \to \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C}) = R$$

が，自然な同型 $\Gamma_\tau \cong \Gamma$ を通じて定義されることになる。写像 F についての基本的事実として，（１）$\mathrm{Im}F$ の各点は R の正則点であり，（２）F は局所双正則写像となることが知られている（[1]–[3]）。

先に述べたように，我々の目的は空間 R 上の自然なシンプレクティック構造 ω_R を F によって引き戻して得られる Q 上のシンプレクティック構造を調べることである。

ところが一方で，空間 Q はタイヒミュラー空間 $T(\Gamma)$ の正則余接束 $T^*T(\Gamma)$ とみなされ，したがってその上には自然なシンプレクティック構造 ω_Q が定まることになる。Q 上に定まるこれら二つのシンプレクティック構造が（定数倍を除いて）一致することを主張するのが今回の主定理である（[7]）。

定理2: 写像 $F\colon Q \to R$ はシンプレクティック構造を（定数 π を除いて）保つ，すなわち

$$\pi F^*\omega_R = \omega_Q$$

が成立する。

これによって我々は，（特異点を考えないという制限つきで），射影接続のモジュライの上に引き戻しを通じて定義されるシンプレクティック構造の内在的な特徴づけを与えたことになる。

これからの課題としては，一般の種数のリーマン面上で射影接続が確定特異点をもつ状況を考察することがまずあげられる。特異点がない場合には，上述のように射影接続のモジュライをリーマン面のタイヒミュラー空間の正則余接束と同一視することができた。このことからの自然な類推として，特異点がある場合には，タイヒミュラー空間 $T(g,m)$（g は種数，m は特異点の個数に対応する）の正則余接束が射影接続のモジュライとみなされることになるのではないかと期待されるが，残念ながら両者を「同一視する」というわけにはいかない。一般に，$T(g,m)$ 上の点 τ を（一意化された）閉リーマン面 X であって（相異なる）m 点が指定されたものとみなすとき，τ における $T(g,m)$ に対する余接空間は，閉リーマン面 X 上の有理形二次微分であって指定された m 点に高々一位の極をもつもの全体と同一視される。一方，X 上の射影接続（＝二次微分）が指定された m 点を確定特異点とするための条件は，それら m 点がそれぞれ高々二位の極となることであり，ここに上述の余接空間の場合との違いが生じることになる。しかし今の場合，特異点のまわりの局所的なモノドロミーは固定して考えているので，各特異点における射影接続のローラン展開の -2 次の係数はあらかじめ指定されていることになり，したがって $T(g,m)$ の正則余接束 $T^*T(g,m)$ の次元と射影接続のモジュライの次元とは一致することが期待される。このため現在のところ，$T^*T(g,m)$ と射影接続のモジュライとの間になんらかの一対一対応が存在して，この対応を通じて $T^*T(g,m)$ 上の自然なシンプレクティック構造を射影接続のモジュライの上に引き戻したものが求めるシンプレクティック構造と一致するのではないかと予想している。

さらに興味深いのは，「特異点の合流」，「リーマン面の退化」と射影接続のモジュライのシンプレクティック構造との関係を調べることである。具体的には，これは次のようなステップで実行することになるであろう。

(1) タイヒミュラー空間 $T(g,m)$（先と同様に g は種数，m は特異点の個数に対応

する）のコンパクト化 $\widehat{T}(g,m)$ を導入し，その境界上の点の表すノードをもつリーマン面の上の（一般には非フックス型の）有理形射影接続という概念をしかるべく定義する。（確定特異点の合流を考えるためには必然的に不確定特異点を扱わなければならないことに注意する。）

(2) 各 $\tau \in \widehat{T}(g,m)$ の上のファイバーが（適当な条件をみたす）有理形射影接続の全体となっているようなモジュライを実際に構成する。

(3) そのモジュライの $T(g,m)$ への制限の上に定まる自然なシンプレクティック構造の境界挙動を，適当な座標をとるか，または内在的な方法で記述する。

そして，これらの課題が達成されれば，おそらく数理物理学における弦理論や Holonomic Quantum Fields 理論との関係（の有無）なども視野に入ってくるものと思われる。

References

[1] C. J. Earle, *On variation of projective structures*, in *Riemann Surfaces and Related Topics*, 1978 *Stony Brook Conference*, I. Kra and B. Maskit, eds., Ann. of Math. Studies **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, 87-99.

[2] D. A. Hejhal, *Monodromy groups and linearly polymorphic functions*, Acta Math. **135** (1975), 1-55.

[3] J. H. Hubbard, *The monodromy of projective structures*, in *Riemann Surfaces and Related Topics*, 1978 *Stony Brook Conference*, I. Kra and B. Maskit, eds., Ann. of Math. Studies **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, 257-275.

[4] K. Iwasaki, *Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on a Riemann surface*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **38** (1991), 431-531.

[5] ———, *Fuchsian moduli on Riemann surfaces — its Poisson structure and the Poincaré-Lefschetz duality*, Pacific J. Math. **155** (1992), 319-340.

[6] S. Kawai, *Deformation of complex structures on a torus and monodromy preserving deformation*, preprint.

[7] ———, *The symplectic nature of the space of projective connections on Riemann surfaces*, preprint.

[8] K. Okamoto, *On Fuchs's problem on a torus*, I, Funkcial. Ekvac. **14** (1971), 137-152.

[9] ———, *Sur le problème de Fuchs sur un tore*, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24** (1977), 357-372.

[10] ———, *Déformation d'une équation différentielle linèare avec une singularité irrégulière sur un tore*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **26** (1979), 501-518.

[11] ———, *Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **33** (1986), 575-618.

[12] ———, *The Hamiltonian structure derived from the holonomic deformation of the linear ordinary differential equations on an elliptic curve*, Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo **37** (1987), 1-11.

[13] ———, *On the holonomic deformation of linear ordinary differential equations on an elliptic curve*, preprint.

A GENERALIZATION OF THE MORITA-MUMFORD CLASSES TO EXTENDED MAPPING CLASS GROUPS FOR SURFACES

NARIYA KAWAZUMI

Department of Mathematics, Faculty of Sciences,
Hokkaido University, Sapporo, 060 Japan

ABSTRACT. Let $\Sigma_{g,1}$ be an orientable compact surface of genus g with 1 boundary component, and $\Gamma_{g,1}$ the mapping class group of $\Sigma_{g,1}$. We define a bigraded series of cohomology classes $m_{i,j} \in H^{2i+j-2}(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^j H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}))$, $2i+j-2 \geq 1$, $i, j \geq 0$. When $j = 0$, the class $m_{i+1,0}$ is the i-th Morita-Mumford class [Mo][Mu]. It is proved that $H^r(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^s H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Q}))$ is generated by $m_{i,j}$'s for the case $r + s = 2$ and the case $g \geq 5$ and $(r, s) = (1, 3)$. Especially the Johnson homomorphism extended to the whole mapping class group by Morita [Mo3] has an implicit representation by the classes $m_{0,3}$ and $m_{0,2}m_{1,1}$ over $\mathbb{Q}$.

INTRODUCTION

Let $g \geq 2$, $r, n \geq 0$ be integers. Let $\Sigma_{g,r}^n$ denote a 2-dimensional compact oriented C^∞ manifold (i.e., compact oriented surface) of genus g with r boundary components and (ordered) n punctures. The group of path-components $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,r}^n))$ is denoted by $\Gamma_{g,r}^n$ (or $\mathcal{M}_{g,r}^n$) and called the mapping class group of genus g with r boundary components and (ordered) n punctures. Here $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,r}^n)$ denotes the topological group (endowed with C^∞ topology) consisting of all orientation preserving diffeomorphisms of $\Sigma_{g,r}^n$ which fix the boundary components and the punctures pointwise. When $n = 0$, we drop the indices: $\Sigma_{g,r} = \Sigma_{g,r}^0$, $\Gamma_{g,r} = \Gamma_{g,r}^0$ and similarly $\Sigma_g = \Sigma_{g,0}^0$, $\Gamma_g = \Gamma_{g,0}^0$. Throughout this paper we denote by $H_1(\Sigma_{g,r}^n)$ the first integral singular homology of the space $\Sigma_{g,r}^n$, on which the group $\Gamma_{g,s}^m$ act in an obvious way provided that $s \geq r$ and $m \geq n$.

By the *extended mapping class group* we mean the semi-direct product

$$\widetilde{\Gamma_{g,r}^n} := H_1(\Sigma_{g,1}) \rtimes \Gamma_{g,r}^n.$$

The purpose of the present paper is to define a bigraded series $\widetilde{m_{i,j}}$ of cohomology classes of the extended group $\widetilde{\Gamma_{g,1}}$, which is a generalization of the Morita-Mumford cohomology classes of the group Γ_g, and to investigate the ones of lower degree.

In §1 we prepare a theory of cohomology of pairs of groups, which is essential to the construction of the classes in the succeeding two sections. The E_2-term of the

1991 Mathematical Subject Classification. Primary 57R20. Secondary 14H15, 20J05, 57R32, 20F36.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Lyndon-Hochschild-Serre spectral sequence of the group $\widetilde{\Gamma_{g,1}}$ with respect to the normal subgroup $H_1(\Sigma_{g,1})$ is given by

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^q H^1(\Sigma_{g,1})).$$

So the classes $\widetilde{m_{i,j}}$ induce cohomology classes $m_{i,j}$ of the group $\Gamma_{g,1}$ with values in $\bigwedge^* H^1(\Sigma_{g,1})$. When $j = 0$, the class $m_{i+1,0}$ is the i-th Morita-Mumford class [Mo][Mu]. In §4, in order to see the non-triviality, we evaluate the classes $m_{0,2}$, $m_{1,1}$ and $m_{0,3}$ and prove that $H^r(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^s H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Q}))$ is generated by $m_{i,j}$'s for the case $r + s = 2$ (Proposition 4.1, Theorem 4.3, Corollary 4.5) and the case $g \geq 5$ and $(r, s) = (1, 3)$ (Theorem 4.4). Especially the Johnson homomorphism extended to the whole mapping class group by Morita [Mo3] has an implicit representation by the classes $m_{0,3}$ and $m_{0,2}m_{1,1}$ over $\mathbb{Q}$.

The author would like to express his gratitude to Prof. S. Morita and Prof. A. Kohno for helpful discussions.

Contents.

1. Cohomology of Pairs of Groups.

In this section we define cohomology groups $H^*(G, H : M)$ of a pair of groups (G, H) in the most naive sense. Denote by $C^*(G; M)$ the normalized cochain complex of a group G with values in a G-module M.

Let G be a group, H a subgroup of G, and M a G-module. We denote by $H^*(G, H; M)$ the cohomology group of the kernel of the restriction map

$$\mathrm{res} : C^*(G; M) \to C^*(H; M)$$

and call it *the cohomology group of the pair of groups* (G, H) *with values in the* G*-module* M. Since the restriction map res is surjective in the cochain level, we have a cohomology exact sequence

$$(1.1) \qquad \cdots \to H^{q-1}(H; M) \to H^q(G, H; M) \to H^q(G; M) \to H^q(H; M) \to \cdots,$$

In a natural way the cup product

$$\cup : H^*(G; M') \otimes H^*(G, H; M'') \to H^*(G, H; M' \otimes M'')$$

is defined.

Let $K \triangleleft G$ be a normal subgroup satisfying the condition

$$(1.2) \qquad HK = G.$$

Then we have the following Lyndon-Hochshild-Serre (LHS) spectral sequence [HS].

Proposition 1.3. *There is a spectral sequence converging to $H^*(G, H; M)$ whose E_2 term is given by*

$$E_2^{p,q} = H^p(G/K; H^q(K, K \cap H; M)).$$

It should be remarked how the quotient group G/K acts on the cohomology group $H^*(K, K \cap H; M)$. Since K is a normal subgroup of G, the group H acts on the normalized complex $C^*(K, K \cap H; M)$ by

$$(h \cdot c)(x_1, \ldots, x_n) := h(c(h^{-1}x_1 h, \ldots, h^{-1}x_n h)),$$

where $h \in H$, $c \in C^n(K, K \cap H; M)$ and $x_1, \ldots, x_n \in K$. For any element $h \in K \cap H$ consider a homotopy map

$$\Phi = \Phi_h : C^n(K, K \cap H; M) \to C^{n-1}(K, K \cap H; M)$$

given by

$$(\Phi_h c)(x_1, \ldots, x_{n-1}) := \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j c(x_1, \ldots, x_j, h, h^{-1}x_{j+1}h, \ldots, h^{-1}x_{n-1}h),$$

This map is well-defined and satisfies a homotopy equation

$$(d\Phi_h + \Phi_h d)c = h \cdot c - c \quad (\forall c \in C^*(K, K \cap H; M)).$$

Hence the subgroup $K \cap H$ acts on the cohomology group $H^*(K, K \cap H; M)$ trivially. From the condition (1.2) and the Second Isomorphism Theorem we have a natural isomorphism

$$G/K = H/K \cap H.$$

Thus the quotient group G/K acts on the cohomology group $H^*(K, K \cap H; M)$.

Let M, M_1 and M_2 be G/K-modules. Suppose

$$H^q(K, K \cap H; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } q = n, \\ 0, & \text{if } q > n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Then the spectral sequence (1.3) induces a homomorphism

$$\pi_! : H^p(G, H; M) \to H^{p-n}(G/K; M), \tag{1.5}$$

which is called *the Gysin map* or *the fiber integral.* As usual we have

$$\pi_!(u \cup \pi^* v) = (\pi_! u) \cup v \in H^{p+q-n}(G/K; M_1 \otimes M_2), \tag{1.6}$$

for $u \in H^p(G, H; M_1)$ and $v \in H^q(G/K; M_2)$.

2. Mapping Class Groups.

From now on we consider mainly the mapping class groups $\Gamma_{g,1}$ and $\Gamma^1_{g,1}$. First we remark that the surface $\Sigma^1_{g,1}$ is obtained by glueing the surfaces $\Sigma_{g,1}$ and $\Sigma^1_{0,2}$ along the boundaries. So the diffeomorphism of $\Sigma_{g,1}$ is naturally extended to that of $\Sigma^1_{g,1}$. The infinite cyclic group $\mathbb{Z}$ acts on the surface $\Sigma^1_{0,2}$ by rotating the puncture and fixing the boundaries pointwise. Similarly this action is extended to that on $\Sigma^1_{g,1}$ in a natural way. Thus we obtain a natural homomorphism $\Gamma_{g,1} \times \mathbb{Z} \to \Gamma^1_{g,1}$, which is injective (see [I] §5). In the sequal we regard the group $\Gamma_{g,1} \times \mathbb{Z}$ as a subgroup of $\Gamma^1_{g,1}$ through the injection. Especially we may consider the cohomology group $H^*(\Gamma^1_{g,1}, \Gamma_{g,1} \times \mathbb{Z}; M)$ for an arbitrary $\Gamma^1_{g,1}$-module M. By forgetting the puncture we obtain an extension

$$1 \to \pi_1(\Sigma_{g,1}) \to \Gamma^1_{g,1} \xrightarrow{\pi} \Gamma_{g,1} \to 1. \tag{2.1}$$

Next we prepare a cycle induced by the "fiber" $\pi_1(\Sigma_{g,1})$. Choose a usual symplectic generator system of the fundamental group $\pi_1(\Sigma_{g,1})$:

$$a_1, a_2, \ldots, a_g, b_1, b_2, \ldots, b_g.$$

The loop on the boundary induces an element of $\pi_1(\Sigma_{g,1})$

$$w := \prod\nolimits_{i=1}^{g} [a_i b_i], \quad [a_i, b_i] = a_i b_i {a_i}^{-1} {b_i}^{-1}.$$

We identify the group $\mathbb{Z}$ with the subgroup generated by w in $\pi_1(\Sigma_{g,1})$, and consider the cohomology group of the pair $H^*(\pi_1(\Sigma_{g,1}), \mathbb{Z})$.

Following Meyer [Me], we construct a normalized bar 2-chain $[\Sigma_{g,1}, \partial]$ as follows. For $1 \le j \le 4g$ let $w_j = {a_i}^{\pm 1}, {b_i}^{\pm 1}$ be the j-th generator in the element w, and $\widetilde{w_j} := w_1 w_2 \cdots w_j = a_1 b_1 \cdots w_j$. Let $\widetilde{w_0} = 1$. We define

$$[\Sigma_{g,1}, \partial] := \sum_{j=1}^{4g} [\widetilde{w_{j-1}} | w_j] - \sum_{i=1}^{g} ([a_i | {a_i}^{-1}] + [b_i | {b_i}^{-1}]) \in C_2(\pi_1(\Sigma_{g,1})). \tag{2.2}$$

Lemma 2.3. *For any trivial $\pi_1(\Sigma_{g,1})$-module M, we have*

$$H^*(\pi_1(\Sigma_{g,1}), \mathbb{Z}; M) = \begin{cases} H \otimes M, & \text{if } * = 1, \\ M, & \text{if } * = 2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. The evaluation

$$< \cdot, [\Sigma_{g,1}, \partial] >: H^2(\pi_1(\Sigma_{g,1}), \mathbb{Z}; M) \to M$$

is a well-defined isomorphism.

The first half of the lemma follows form the exact sequence (1.1), and the second from straightforward calculations.

Now let M be a $\Gamma_{g,1}$-module. The condition (1.2) is satisfied for our case $G = \Gamma^1_{g,1}$, $H = \Gamma_{g,1} \times \mathbb{Z}$ and $K = \pi_1(\Sigma_{g,1})$. It follws from Proposition 1.3 there exists a spectral sequence converging to

$$H^*(\Gamma^1_{g,1}, \Gamma_{g,1} \times \mathbb{Z}; M),$$

whose E_2 term is given by

$$H^p(\Gamma_{g,1}; H^q(\pi_1(\Sigma_{g,1}), \mathbb{Z}; M)) = \begin{cases} H^p(\Gamma_{g,1}; H \otimes M), & \text{if } * = 1, \\ H^p(\Gamma_{g,1}; M), & \text{if } * = 2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence it induces a Gysin exact sequence

$$\begin{aligned} \cdots \to H^{q-1}(\Gamma_{g,1}; M) \to H^{q+1}(\Gamma_{g,1}; H \otimes M) & \\ \to H^{q+2}(\Gamma^1_{g,1}, \partial\Gamma^1_{g,1}; M) &\overset{\pi_!}{\to} H^q(\Gamma_{g,1}; M) \to \cdots . \end{aligned}$$

Here the homomorphism $\pi_!$ is *the fiber integral* introduced in (1.5).

The Gysin sequence splits as follows. The identity map $1_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ generates the cohomology group $H^1(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Regard $1_{\mathbb{Z}}$ as an element of $H^1(\Gamma_{g,1} \times \mathbb{Z})$ through the natural projection $\Gamma_{g,1} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ and denote by θ the image of $1_{\mathbb{Z}}$ under the connecting homomorphism δ^*:

$$\theta := \delta^*(1_{\mathbb{Z}}) \in H^2(\Gamma^1_{g,1}, \partial\Gamma^1_{g,1}; \mathbb{Z}).$$

Since $< \theta, [\Sigma_{g,1}, \partial] >= -1$, we have

$$\pi_! \theta = -1 \in H^0(\Gamma_{g,1}; \mathbb{Z}). \tag{2.4}$$

Thus, from the property (1.6) of the fiber integral $\pi_!$, the sequence splits. Consequently we have

Proposition 2.5. *For any $\Gamma_{g,1}$-module M, we have an exact sequence*

$$0 \to H^{q+1}(\Gamma_{g,1}; H \otimes M) \to H^{q+2}(\Gamma^1_{g,1}, \partial\Gamma^1_{g,1}; M) \overset{\pi_!}{\to} H^q(\Gamma_{g,1}; M) \to 0,$$

which splits as follows:

$$H^{q+2}(\Gamma^1_{g,1}, \partial\Gamma^1_{g,1}; M) = H^{q+1}(\Gamma_{g,1}; H \otimes M) \oplus \theta \cup H^q(\Gamma_{g,1}; M).$$

On the other hand, taking the semi-direct product of the extension (2.1) and the $\Gamma_{g,1}$-module $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})$, we have an extension of groups

$$1 \to \pi_1(\Sigma_{g,1}) \to \widetilde{\Gamma^1_{g,1}} \overset{\widetilde{\pi}}{\to} \widetilde{\Gamma^1_{g,1}} \to 1. \tag{2.6}$$

In a similar way to the fiber integral $\pi_!$ we obtain *the fiber integral*

$$\widetilde{\pi}_! : H^q(\widetilde{\Gamma^1_{g,1}}, \widetilde{\Gamma_{g,1}} \times \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \to H^{q-2}(\widetilde{\Gamma_{g,1}}; \mathbb{Z}).$$

3. Construction of Cohomology Classes.

For the rest we often abbreviate

$$H := H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z}) = H^1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z}).$$

The isomorphism on the right-hand side is the Poincaré duality, which is $\Gamma_{g,1}$-equivariant. We remark this H plays a different role in the sequal from the subgroup H in the preceeding sections.

Denote by $\cdot$ the intersection form on $H \cong H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$.

Choose a simple curve l on $\Sigma^1_{g,1}$ connecting the puncture to a point on the boundary. Define a 2-cochain $\widetilde{\omega_l} \in C^2(\widetilde{\Gamma^1_{g,1}};\mathbb{Z})$ by

$$\widetilde{\omega_l}(u_1\gamma_1, u_2\gamma_2) := \gamma_1(\gamma_2 l - l)\cdot u_1, \quad u_1, u_2 \in H,\ \gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma^1_{g,1}, \tag{3.1}$$

and a 1-cochain $\omega_l \in C^1(\Gamma^1_{g,1};H)$ by

$$\omega_l(\gamma) = \gamma l - l \in H, \quad \gamma \in \Gamma^1_{g,1}, \tag{3.2}$$

where we remark $\gamma_2 l - l$ can be regarded as a closed curve on $\Sigma_{g,1}$. A straightforward computation shows the cochains $\widetilde{\omega_l}$ and ω_l are cocycles. On the other hand, if $\gamma \in \Gamma_{g,1}\times\mathbb{Z}$, the curve $\gamma l - l$ is homotopic to a curve in the boundary $\partial\Sigma_{g,1}$. Hence $\gamma l - l = 0 \in H$. Thus we have

$$\widetilde{\omega_l} \in Z^2(\widetilde{\Gamma^1_{g,1}}, \widetilde{\Gamma_{g,1}}\times\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \quad \text{and} \quad \omega_l \in Z^2(\Gamma^1_{g,1}, \Gamma_{g,1}\times\mathbb{Z};H). \tag{3.3}$$

To study the dependence of the cohomology classes $[\widetilde{\omega_l}]$ and $[\omega_l]$ on the choice of the curve l, choose another simple curve l' on $\Sigma^1_{g,1}$ connecting the puncture to the boundary. The cycle $v := l' - l$ on $\Sigma^1_{g,1}$ may be regarded as an element in H. So we have

$$\omega_{l'} - \omega_l = dv \in C^1(\Gamma^1_{g,1};H). \tag{3.4}$$

When we define a 1-cochain $c_v \in C^1(\widetilde{\Gamma^1_{g,1}})$ by

$$c_v(u\gamma) := (\gamma v)\cdot u, \quad u \in H, \gamma \in \Gamma^1_{g,1},$$

we have

$$\widetilde{\omega_{l'}} - \widetilde{\omega_l} = dc_v. \tag{3.5}$$

Let $e \in H^2(\Gamma^1_g;\mathbb{Z})$ be the Euler class of the central extension

$$1 \to \mathbb{Z} \to \Gamma_{g,1} \to \Gamma^1_g \to 1.$$

The class e may be regarded as a cohomology class in $H^2(\Gamma^1_{g,1}, \Gamma_{g,1}\times\mathbb{Z};\mathbb{Z})$ in an obvious way. From (3.4) and (3.5), if $i+j \geq 2$, the products

$$e^i[\widetilde{\omega_l}]^j \in H^{2i+2j}(\widetilde{\Gamma^1_{g,1}}, \widetilde{\Gamma_{g,1}}\times\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \quad \text{and}$$
$$e^i[\omega_l]^j \in H^{2i+j}(\Gamma^1_{g,1}, \Gamma_{g,1}\times\mathbb{Z};\textstyle\bigwedge^j H)$$

are independent of the choice of the curve l. We denote them by $e^i\widetilde{\omega}^j$ and $e^i\omega^j$ respectively.

Recall $H^p(\Gamma^1_{g,1}; \bigwedge^q H)$ is the $E_2^{p,q}$-term of the LHS spectral sequence of $\widetilde{\Gamma_{g,1}}$ with respect to the normal subgroup H. Since we have

$$\widetilde{\omega_l}(u_1, u_2\gamma_2) = \omega_l(\gamma_2) \cdot u_1$$

for $\forall u_1, u_2 \in H$ and $\gamma_2 \in \Gamma^1_{g,1}$, the class $[\omega_l] \in H^1(\Gamma^1_{g,1}, \Gamma_{g,1} \times \mathbb{Z}; H)$ is equal to that induced by $\widetilde{\omega_l} \in H^2(\widetilde{\Gamma^1_{g,1}}, \widetilde{\Gamma_{g,1}} \times \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$. Now we can define the cohomology classes $\widetilde{m_{i,j}}$ and $m_{i,j}$. Consider two extensions of groups

$$(2.1) \qquad 1 \to \pi_1(\Sigma_{g,1}) \to \Gamma^1_{g,1} \xrightarrow{\pi} \Gamma^1_{g,1} \to 1$$

$$(2.6) \qquad 1 \to \pi_1(\Sigma_{g,1}) \to \widetilde{\Gamma^1_{g,1}} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{\Gamma^1_{g,1}} \to 1.$$

We define

$$(3.6) \qquad \begin{aligned} m_{i,j} &:= \pi_!(e^i\omega^j) \in H^{2i+j-2}(\Gamma_{g,1}; \textstyle\bigwedge^j H) \\ \widetilde{m_{i,j}} &:= \widetilde{\pi}_!(e^i\widetilde{\omega}^j) \in H^{2i+2j-2}(\widetilde{\Gamma_{g,1}}; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

for $i, j \in \mathbb{N}$. Here $\pi_!$ and $\widetilde{\pi}_!$ are the fiber integrals introduced in the previous section. Clearly $m_{i+1,0}$ and $\widetilde{m_{i+1,0}}$ are equal to (the image of) the i-th Morita-Mumford (tautological) class $e_i(= \kappa_i) \in H^{2i}(\Gamma_g; \mathbb{Z})$ [Mo][Mu]:

$$(3.7) \qquad m_{i+1,0} = \widetilde{m_{i+1,0}} = e_i \in H^{2i}(\Gamma_{g,1}; \mathbb{Z}).$$

Remark 3.8. Let $\mathcal{F}_{g-1}$ be the dressed moduli of pairs of compact Riemann surfaces of genus g and holomorphic line bundles of degree $g-1$ on the surfaces. The space $\mathcal{F}_{g-1}$ is aspherical and its π_1 is equal to $\widetilde{\Gamma_{g,1}}$. As is known, the Lie algebra of holomorphic differential operators "near S^1" has an infinitesimal and transitive action on the dressed moduli $\mathcal{F}_{g-1}$ [ADKP]. The $\widetilde{m_{i,j}}$'s have their origins in the equivariant cohomology of $\mathcal{F}_{g-1}$ under this action [Ka1].

4. Evaluations.

The purpose of this section is to evaluate the classes $m_{2,0}$, $m_{1,1}$ and $m_{0,3}$ and to prove that $H^r(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^s H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Q}))$ is generated by $m_{i,j}$'s for the case $r+s=2$ and the case $g \geq 5$ and $(r,s)=(1,3)$.

Denote by Ω the symplectic form on H induced by the cup product:

$$\Omega := \sum_{i=1}^{g} a_i \otimes b_i - b_i \otimes a_i \in \bigwedge^2 H,$$

where $\{a_i, b_i; 1 \leq i \leq g\}$ is (the homology classes induced by) a symplectic generator system of the fundamental group $\pi_1(\Sigma_{g,1})$ as in §2.

Proposition 4.1.

$$m_{0,2} = \pi_!(\omega^2) = 2\Omega \in H^0(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^2 H).$$

Proof. It suffices to show that

$$< \omega^2, [\Sigma_{g,1}, \partial] >= 2\Omega.$$

Here $[\Sigma_{g,1}, \partial]$ is a 2-chain introduced in (2.2). Since $\omega(\widetilde{w_{4i}}) = 0$, we have

$$< \omega^2, [\Sigma_{g,1}, \partial] >= \sum_{j=1}^{4g} \omega^2(\widetilde{w_{j-1}}, w_j) - \sum_{i=1}^{g}(\omega^2(a_i; {a_i}^{-1}) + \omega^2(b_i, {b_i}^{-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{g} a_i \wedge b_i - (a_i + b_i) \wedge a_i - (a_i + b_i - a_i) \wedge b_i + a_i \wedge a_i + b_i \wedge b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{g} a_i \wedge b_i - b_i \wedge a_i = 2\Omega,$$

as was to be shown. □

Next we study the classes $m_{1,1}$ and $m_{0,3}$. In [Mo1] and [Mo2] Morita proved

$$H^1(\Gamma_{g,1}; H) = \mathbb{Z}, \quad \text{and} \quad H^1(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^3 H) = \mathbb{Z}^2, \tag{4.2}$$

where we denote $H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})$ as before. Our results are

Theorem 4.3. *The class $m_{1,1}$ generates the group $H^1(\Gamma_{g,1}; H)$.*

Theorem 4.4. *If $g \geq 5$, the classes $m_{0,2}m_{1,1}$ and $m_{0,3}$ generate the group $H^1(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^3 H \otimes \mathbb{Q})$.*

The rest of this section is devoted to the proof of the theorems. As was shown by Harer [H], if $g \geq 3$, we have $H^2(\Gamma_{g,1}; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ and the class $m_{2,0} = e_1$ generates it. Hence in the case $r+s=2$ the groups $H^r(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^s H \otimes \mathbb{Q})$ are generated by the classes $m_{i,j}$'s. Consequently

Corollary 4.5. *If $g \geq 3$, the group $H^2(\widetilde{\Gamma_{g,1}};\mathbb{Q})$ is isomorphic to $\mathbb{Q}^3$ and the classes $\widetilde{m_{0,2}}$, $\widetilde{m_{1,1}}$ and $\widetilde{m_{2,0}}$ form its free basis.*

The first half of the corollary has been already shown by Arbarello et. al.([ADKP] §5).

To prove the theorems we endow the surface Σ_g with a Riemannian metric. Fix a sufficiently small positive real ϵ. Let $\varpi : ST\Sigma_g \to \Sigma_g$ be the unit tangent bundle of the surface Σ_g. Denote by D^2 the unit disk in $\mathbb{C}$: $D^2 := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. We define a disk bundle D_g over $ST\Sigma_g$ by

$$D_g := \{(v_1, x_2) \in ST\Sigma_g \times \Sigma_g; \mathrm{dist}(\varpi(v_1), x_2) \leq \epsilon\},$$

The first projection induces its projection $p_1 : D_g \to ST\Sigma_g$. The disk bundle is trivial through the projection

$$ST\Sigma_g \times D^2 \to D_g, \quad (v, z) \mapsto (v, \mathrm{Exp}_{\varpi(v)}(\epsilon z v)).$$

Here we use the (almost) complex structure induced by the given Riemannian metric.

Consider a $\Sigma_{g,1}$-bundle

$$p_1 : Y_g(:= ST\Sigma_g \times \Sigma_g - \mathrm{int}\, D_g) \to ST\Sigma_g$$

induced by the first projection. The fundamental group $\pi_1(ST\Sigma_g)$ is embedded into the group $\Gamma_{g,1}$ through the classifying map ι of the bundle $p_1 : Y_g \to ST\Sigma_g$, and is identified with the kernel of the forgetting map $\Gamma_{g,1} \to \Gamma_g$:

$$1 \to \pi_1(ST\Sigma_g) \xrightarrow{\iota} \Gamma_{g,1} \to \Gamma_g \to 1.$$

Since the spaces Σ_g, $ST\Sigma_g$, D_g and Y_g are all aspherical, we drop the notations $\pi_1(\cdot)$ in the cohomology groups.

The identity map $1_H \in \mathrm{Hom}(H, H)$ induces a cohomology class

$$1_H \in H^1(\Sigma_g; H) \cong \mathrm{Hom}(H, H).$$

By abuse of notation we denote also by 1_H the pull-back $\varpi^*(1_H)$ through the projection $\varpi : ST\Sigma_g \to \Sigma_g$:

$$1_H = \varpi^*(1_H) \in H^1(ST\Sigma_g; H) \cong \mathrm{Hom}(H, H).$$

In [Mo1] Morita proved the following theorem (see also [Mo2] p.81 l.4 ff).

Theorem 4.6 (Morita).

$$H^1(\Gamma_{g,1}; H) = \mathbb{Z}.$$

Furthermore a crossed homomorphism $k : \Gamma_{g,1} \to H$ represents a generator of the group $H^1(ST\Sigma_g; H)$ if and only if the restriction of k to $\pi_1(ST\Sigma_g)$ is equal to $\pm(2-2g)1_H$:

$$\iota^*(k) = \pm(2-2g)1_H \in H^1(ST\Sigma_g; H).$$

As for $\bigwedge^3 H = \bigwedge^3 H_1(\Sigma_{g,1}; H)$ he proved the following ([Mo3] Theorem 5.1, see also the proof of Corollary 5.7). Let k_0 be a generator of the group $H^1(\Gamma_{g,1}; H)$.

Theorem 4.7 (Morita). *If $g \geq 3$,*

$$H^1(\Gamma_{g,1}; \bigwedge^3 H) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

The class $\Omega \wedge k_0$ and a class he named $2\tilde{k}$ form its free basis. Furtheremore their restriction to $\pi_1(ST\Sigma_g)$ are given by

$$\iota^*(\Omega \wedge k_0) = \pm(2-2g)\Omega \wedge 1_H \in H^1(ST\Sigma_g; \bigwedge^3 H),$$
$$\iota^*(2\tilde{k}) = 2\Omega \wedge 1_H \in H^1(ST\Sigma_g; \bigwedge^3 H).$$

Therefore our theorems are reduced to

Assertion 4.8.

$$\iota^*(m_{1,1}) = -(2-2g)1_H \in H^1(ST\Sigma_g; H) \tag{1}$$
$$\iota^*(m_{0,3}) = -6\,\Omega \wedge 1_H \in H^1(ST\Sigma_g; \bigwedge^3 H) \tag{2}$$

In fact, (1) implies Theorem 4.3 by Theorem 4.6. So we have $m_{2,0}m_{1,1} = \pm 2\Omega \wedge k_0$. From Theorem 4.7 the class $m_{0,3}$ has a representation $m_{0,3} = a\Omega \wedge k_0 + b(2\tilde{k})$ for some integers a and b. Since $H^1(ST\Sigma_g; \bigwedge^3 H) = H \otimes \bigwedge^3 H$ is $\mathbb{Z}$-free, we have

$$-6 = \pm a(2-2g) + 2b,$$

and so $b \equiv -3 \mod (g-1)$, while $g - 1 \geq 4$. Thus we have $b \neq 0$.

This completes the proof of Theorems 4.3 and 4.4 modulo Assertion 4.8.

Let M be a $\pi_1(ST\Sigma_g)$-module. By excision we may consider the map

$$j^* : H^*(Y_g, \partial Y_g; M) \underset{\text{exc.}}{\cong} H^*(ST\Sigma_g \times \Sigma_g, D_g; M) \to H^*(ST\Sigma_g \times \Sigma_g; M).$$

The fiber integral $p_{1!} : H^*(Y_g, \partial Y_g; M) \to H^{*-2}(ST\Sigma_g; M)$ decomposes itself into

$$H^*(Y_g, \partial Y_g; M) \xrightarrow{j^*} H^*(ST\Sigma_g \times \Sigma_g, D_g; M) \xrightarrow{p_{1!}} H^{*-2}(ST\Sigma_g; M).$$

Here the latter fiber integral $p_{1!}$ is the usual one induced by the first projecion $p_1 : ST\Sigma_g \times \Sigma_g \to ST\Sigma_g$. Thus we have

$$\iota^* m_{1,1} = p_{1!}j^*(e\omega) \quad \text{and} \quad \iota^* m_{0,3} = p_{1!}j^*(\omega^3).$$

Now we have

$$j^*(e) = p_2{}^*e' \in H^2(ST\Sigma_g \times \Sigma_g; \mathbb{Z})$$
$$j^*(\omega) = p_2{}^*1_H - p_1{}^*1_H \in H^1(ST\Sigma_g \times \Sigma_g; H),$$

where $p_2 : ST\Sigma_g \times \Sigma_g \to \Sigma_g$ is the second projection and

$$e' = e(T\Sigma_g) \in H^2(\Sigma_g; \mathbb{Z}).$$

Since $e'1_H \in H^3(\Sigma_g; H) = 0$, we have

$$\iota^* m_{1,1} = p_{1!}j^*(e\omega) = p_{1!}(p_2{}^*e')(p_2{}^*1_H - p_1{}^*1_H)$$
$$= -(p_{1!}p_2{}^*e')1_H = -(2-2g)1_H.$$

On the other hand, since $(1_H)^3 \in H^3(\Sigma_g; \bigwedge^3 H) = 0$ and $p_{1!}p_2{}^*1_H \in H^{-1}(ST\Sigma_g; H) = 0$, we have

$$j^*(\omega^3) = (p_2{}^*1_H - p_1{}^*1_H)^3 = -3(p_2{}^*(1_H)^2)p_1{}^*1_H + 3(p_2{}^*1_H)p_1{}^*(1_H)^2$$

and

$$p_{1!}j^*(\omega^3) = -3(p_{1!}p_2{}^*(1_H)^2)1_H + 3(p_{1!}p_2{}^*1_H)(1_H)^2 = -3 < (1_H)^2, [\Sigma_g] > 1_H,$$

where we denote by $[\Sigma_g] \in H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ the fundamental class. From a similar calculation to Proposition 4.1 follows $< (1_H)^2, [\Sigma_g] >= 2\Omega$. Therefore

$$\iota^* m_{0,3} = p_{1!}j^*(\omega^*) = -6\Omega \wedge 1_H.$$

This completes the proof of Assertion 4.8 and so those of Theorems 4.3 and 4.4.

Remark 4.9. The crossed homomorphism $\tilde{k} = \frac{1}{2}2\tilde{k} : \Gamma_{g,1} \to \frac{1}{2}\bigwedge^3 H$ in (4.7) is the Johnson homomorphism extended to the whole mapping class group by Morita [Mo3]. Hence Theorem 4.4 implies the Johnson homomorphism $\tilde{k}$ is represented by $m_{0,3}$ and $m_{0,2}m_{1,1}$ over $\mathbb{Q}$. The author, however, doesn't know the explicit representation of $\tilde{k}$ by $m_{0,3}$ and $m_{0,2}m_{1,1}$.

References

[ADKP] E. Arbarello, C. DeContini, V.G. Kac, and C. Procesi, *Moduli spaces of curves and representation theory*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 1–36.

[H] J.L. Harer, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. math. **72** (1983), 221–239.

[HS] G. Hochshild and J.-P. Serre, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 110–134.

[I] A. Ishida, *Master Thesis*, (in Japanese), Univ. of Tokyo (1994).

[Ka] N. Kawazumi, *Homology of hyperelliptic mapping class groups for surfaces*, preprint. Hokkaido Univ. **262**.

[Ka1] ———, *Moduli space and complex analytic Gel'fand-Fuks cohomology of Riemann surfaces, III*, in preparation.

[Me] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. **201** (1973), 239–264.

[Mo] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Inventiones math. **90** (1987), 551–577.

[Mo1] ———, *Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles, I*, Ann. Inst. Fourier **39** (1989), 777–810.

[Mo2] ———, *Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles, II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **105** (1989), 79–101.

[Mo3] ———, *The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group*, Invent. math. **111** (1993), 197–224.

[Mu] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, Arithmetic and Geometry., Progr. Math. **36** (1983), 271–328.

Two-generator discrete subgroups of $Isom(\mathbb{H}^2)$ containing orientation-reversing elements

ELENA KLIMENKO AND MAKOTO SAKUMA,

Abstract. Let f and g be elements of the isometry group $Isom(\mathbb{H}^2)$ of the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$, and assume that one of them is orientation-reversing. We determine when the group $< f, g >$ they generate is discrete; in particular, we obtain the classification of such groups. This enables us to determine the ranks of the extended triangle groups. As an application to knot theory, we determine the tunnel number one Montesinos knots.

The main purpose of this talk is to give an answer to the following problem.

Problem A. *Let f and g be elements of the isometry group $Isom(\mathbb{H}^2)$ of the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$, and assume that one of them is orientation-reversing. Let $G =< f, g >$ be the group they generate. Then when is G discrete?*

The corresponding problem for two-generator subgroups of $Isom^+(\mathbb{H}^2) \cong PSL(2, \mathbb{R})$ has a long history, and there are numerous papers on this subject (see [G, GM, Kn, Mt, P, R] and references therein). As is noted by Rosenberger [R] and Gilman [G], many of these papers seem to have errors and omissions, and a satisfactory solution was given only recently by Gilman [G] following the geometric arguments of Matelski [Mt].

As for $PSL(2, \mathbb{C}) \cong Isom^+(\mathbb{H}^3)$, the problem is far from being completely solved. The remarkable Jϕrgensen's inequality [J] gives a necessary condition, and some special cases are studied in many papers (see [Kl1-4, Ms2, MS] and references therein). In particular, the result of the first author in [Kl1] contains the solution for a special case of Problem A, since $Isom(\mathbb{H}^2)$ is a subgroup of $Isom^+(\mathbb{H}^3)$.

On the other hand, as a consequence of the second author's joint work [MSY] with K. Morimoto and Y. Yokota on the tunnel number problem in knot theory, it

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

was observed that some extended triangle groups are generated by two elements even though their geometric ranks are three [MSY, Proposition 4.1]. This generalized an observation of Kaufmann and Zieschang [KZ] on the gap between the geometric ranks and the (group theoretical) ranks of extended triangle groups. Further, a partial answer to Problem A is announced in [MSY].

In this talk, we report an answer to Problem A using the geometric arguments of Matelski [Mt]. As a consequence, we obtain the classification of two-generator discrete subgroups of $Isom(\mathbb{H}^2)$ containing orientation-reversing elements (Theorem A). In particular, we determine the ranks of the extended triangle groups (Theorem B). As an application to knot theory, we completely determine the tunnel number one Montesinos knots by combining the above result and a result of [MSY] (Theorem C).

1. Notation and statement of results

Definition 1.1. (1) The *extended triangle group* $< p, q, r >$ is the group with the presentation

$$< p, q, r > = < x, y, z | x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^p = (yz)^q = (zx)^r = 1 > .$$

This group is isomorphic to a discrete subgroup of $Isom(\mathbb{H}^2)$, $Isom(\mathbb{E}^2)$, or $Isom(S^2)$ generated by three reflections x, y, and z according as $(1/p)+(1/q)+(1/r)$ is smaller than, equal to, or greater than 1. where $(1/p)+(1/q)+(1/r) < 1$.

(2) The *triangle group* $[p, q, r]$ is the normal subgroup of the reflection group $< p, q, r >$ consisting of the orientation-preserving elements. It has the presentation

$$[p, q, r] = < a, b, c | a^p = b^q = c^r = abc = 1 > .$$

Definition 1.2. Let G be a group generated by two elements. Let $\{f, g\}$ and $\{f', g'\}$ be generator systems of G.

(1) $\{f, g\}$ and $\{f', g'\}$ are said to be *Nielsen equivalent* if there is an isomorphism from the free group generated by the symbols $\{f, g\}$ to that generated by the symbols $\{f', g'\}$ which induces the identity map on G. This is equivalent to the condition that $\{f', g'\}$ is obtained from $\{f, g\}$ by a Nielsen transformation (see [LS]).

(2) $\{f, g\}$ and $\{f', g'\}$ are said to be *extended Nielsen equivalent* if $\{f', g'\}$ is obtained from $\{f, g\}$ by a finite number of Nielsen transformations and the following operations: If f has a finite order n, then transform $\{f, g\}$ to $\{f^k, g\}$ with $1 \leq k < n$ and $(k, n) = 1$ (see [R]).

We explain the plan of our solution of Problem A. Let f and g be elements of $Isom(\mathbb{H}^2)$, $G = < f, g >$, and assume that one of them is orientation-reversing. Then we may assume f is orientation-reversing and g is orientation-preserving. (If both generators are orientation-reversing, then we can replace one of the generators by their product fg without changing the Nielsen equivalence class.) Thus the problem is divided into the following eight cases according to the geometric types of f and g.

	f	g	
1	reflection	elliptic	
2	reflection	parabolic	
3	reflection	hyperbolic	disjoint axes
4	reflection	hyperbolic	intersecting axes
5	glide-reflection	elliptic	
6	glide-reflection	parabolic	
7	glide-reflection	hyperbolic	disjoint axes
8	glide-reflection	hyperbolic	intersecting axes

In each case, we can find an order 2 element, say R, of $Isom(\mathbb{H}^2)$ such that $RfR = f^{-1}$ and $RgR = g^{-1}$. By geometric arguments based on Poincaré's theorem using this element, we can determine the discreteness of G. In particular, we obtain the following classification of the 2-generator discrete subgroups of $Isom(\mathbb{H}^2)$ containing orientation-reversing elements.

Theorem 1.3. *The following is the complete list of 2-generator discrete subgroups of $Isom(\mathbb{H}^2)$ containing orientation-reversing elements. Each group in the list has only finitely many two-generator systems up to extended Nielsen equivalence.*

$< 2, q, r > \quad (q \not\equiv 0 \pmod 2)$,

$< 3, 3, r > \quad (r \not\equiv 0 \pmod 3)$,

$[2; 2, r > = < a, x, y | a^2 = x^2 = y^2 = (xy)^2 = (axay)^r = 1 > \ (r \not\equiv 0 \pmod 2)$,

$[p; q > = < a, x | a^p = x^2 = (axa^{-1}x)^q = 1 >$,

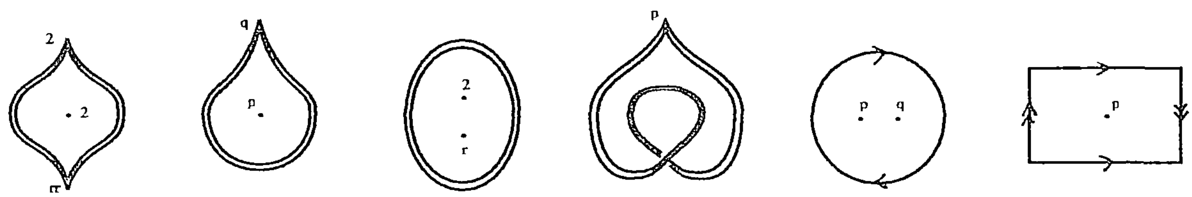
$[2, r; > = < a, \alpha, x | a^r = x^2 = (a\alpha^{-1})^2 = \alpha x \alpha^{-1} x = 1 > \ (r \not\equiv 0 \pmod 2)$,

$M < r > = < \beta, x, y | x^2 = y^2 = \beta x \beta^{-1} y = (\beta y \beta^{-1} x)^r = 1 >$,

$P(p, q) = < \beta, \gamma | (\beta\gamma)^p = (\beta\gamma^{-1})^q = 1 >$,

$K(p) = < \alpha, \beta | (\alpha\beta^{-1}\alpha\beta)^p = 1 >$,

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, $D(p)$.



[2;2,r> [p;q> [2,r;> M<p> P(p,q) Kl(p)

Convention 1.4. In the above, p, q, and r are possibly ∞ or $\bar{\infty}$. Here, ∞ and $\bar{\infty}$, respectively, correspond to a cusp and an open boundary of the quotient orbifold. We regard $\bar{\infty} > \infty > n$, $n/\infty = n/\bar{\infty} = 0$, $\infty \equiv \bar{\infty} \equiv 0 \pmod n$, $\infty/n = \infty$, and $\bar{\infty}/n = \bar{\infty}$ for any positive integer n.

We can easily determine the ranks of the non-hyperbolic extended triangle groups, we obtain the following:

Theorem 1.5. *The extended triangle group $< p, q, r >$ is generated by two elements if and only if one of the following conditions are satisfied up to permutation of the indices:*

(1) $p = 2$ *and* $q \not\equiv 0 \pmod 2$.

(2) $p = q = 3$ *and* $r \not\equiv 0 \pmod 3$.

Remark 1.6. (1) A weaker version of this theorem was also obtained by R. Weidemann [W] by using the small cancellation theory.

(2) The ranks of Fuchsian groups had been determined by [PRZ]. In fact, they showed that the rank of a Fuchsian group G is equal to the *geometric rank* of G provided that G is not equal to $[2, 2, 2, r]$ with r odd. Here the geometric rank of G is the minimal number of generators which arise from convex fundamental domains of G.

In the following section, we explain the solution of the simplest Case 1 of Problem A. For the treatment of the remaining cases, please see [KS].

2. f is a reflection and g is elliptic

Put $A = Fix(f)$ and $b = Fix(g)$. G is discrete only if the rotation angle of g is a rational angle. So we may assume that g is a rotation about b by $2\pi/q$, where q is the order of g. It should be noted that this does not affect the extended Nielsen equivalence class of the generator system $\{f, g\}$.

Case 0. Suppose b lies on A. Then $< f, g >$ is a dihedral group $D(q)$ of order $2q$.

So, in the following, we assume b does not lie on A. Let R be the perpendicular to A through b, and let R_b be the line intersecting R at b with angle π/q. Then we have $f = A$ and $g = R_b R$, here we denote a reflection and its axis by the same symbol. Put $\tilde{G} =< f, g, R >$. Since $R^2 = 1$, $RfR = f$, and $RgR = g^{-1}$, G is a subgroup of $\tilde{G}$ of index at most 2. Hence G is discrete if and only if $\tilde{G}$ is discrete. Note that $\tilde{G} =< A, R, R_b >$ and $(f, g) = (A, R_bR)$.

Case I. Suppose A and R_b do not intersect. Then, by applying Poincaré's theorem to the region bounded A, R, and R_b, we see that $\tilde{G} \cong < 2, q, r >$, where $r = \infty$ or $\bar{\infty}$ according to whether A and R_b share a common end point or not (cf. Convention 1.4). In this case, we see $(A, R, R_b) = (x, y, z)$, By using the fact that G is a subgroup of index at most 2 and is generated by $f = A = x$ and $g = R_bR = zy$, we can see that $G \cong [q; r >$ with $r = \infty$ or $\bar{\infty}$.

Case II. Suppose A and R_b intersect. Let σ be the triangle bounded by A, R, and R_b. Then, by an argument of Matelski [Mt], we can see that $\tilde{G}$ is discrete if and only if one of the following two conditions holds. (Note that R is perpendicular to A.)

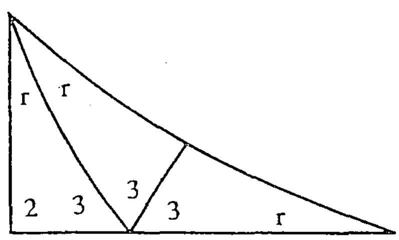
(II.1) The angle between A and R_a is a primitive andle, say π/r, and hence, $\tilde{G} \cong < 2, q, r >$, where $(A, R, R_b) = (x, y, z)$. By calculation, we have

$$H_1(\tilde{G}/G) \cong \begin{cases} < y = z > & \text{if } r \equiv 0 \pmod 2, \\ 0 & \text{if } r \not\equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Hence, we see

$$G \cong \begin{cases} [q; r/2 > & \text{if } r \equiv 0 \pmod 2, \\ < 2, q, r > & \text{if } r \not\equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

(II.2) σ is as illustrated in the following figure and $\tilde{G} \cong < 2, 3, r >$ with $r \not\equiv 0 \pmod 2$, where $(A, R, R_b) = (x, y, zxz)$. From this, we have $G =< 2, 3, r >$.



Conclusion 3.1. *The following is the complete list of discrete subgroups of $Isom(\mathbb{H}^2)$ generated by a reflection and an elliptic element.*

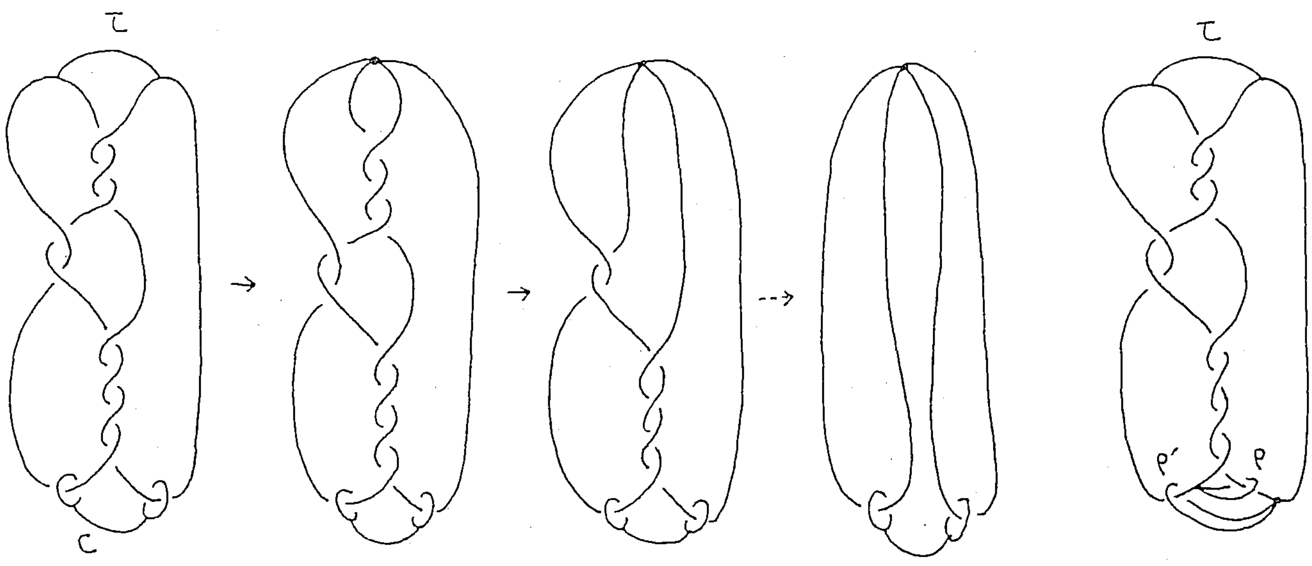
$$<2, q, r> \quad (q \not\equiv 0 \pmod 2),\ r < \infty),$$

$$[p; q> \quad (p < \infty), \quad D(p) \quad (p < \infty).$$

4. Application to the tunnel number problem in Knot theory

Let K be a knot in S^3. The tunnel number $t(K)$ of K is the minimal number of mutually disjoint arcs $\{\tau_i\}$ "properly embedded" in the pair (S^3, K) such that the complement of an open regular neighbourhood of $K \cup (\cup\tau_i)$ is a handlebody. In other words, $t(K)=$ (the Heegaard genus of $E(K)$)-1, where $E(K)$ is the exterior $S^3 - N(K)$ of K. In the above, if the arc system consists of only one arc, it is called an *unknotting tunnel* for K.

Example 4.1. *Any 2-bridge knot has tunnel number 1. In fact, the upper tunnel τ in Figure 4.1 (a) is an unknotting tunnel. From the fact that a core C of $S^3 - K \cup \tau$ consistes oftwo meridian circles and an arc joining them, we see that the tunnels ρ and ρ' in Figure 4.1 (b) are also unknotting tunnels for K, which are dual to τ.*



(a) Fig. 4.1 (b)

Proposition 4.2. *The rank of the knot group $G(K) = \pi_1(S^3 - K)$ is at most $t(K) + 1$.*

It is an important problem whether the idntity $rk(G(K)) = t(K) + 1$ holds or not.

A Montesinos link $K = M(b; (\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_r, \beta_r))$ with r branches is a link in S^3 as illustrated in Figure 4.2 (a). Here r, b, α_i and β_i are integers such that $r \geq 0$, $\alpha_i \geq 2$, and $g.c.d.(\alpha_i, \beta_i) = 1$. A box $\boxed{\beta/\alpha}$ stands for a rational tangle of slope β/α (see Fig. 4.2 (b)). If we forget the chart on the boundary, a rational tangle is merely a 2-strand trivial tangle as illustrated in Figure 4.2 (c); we call the image of the arc τ in Figure 4.2 (c) in a rational tangle the *core* of the rational tangle.

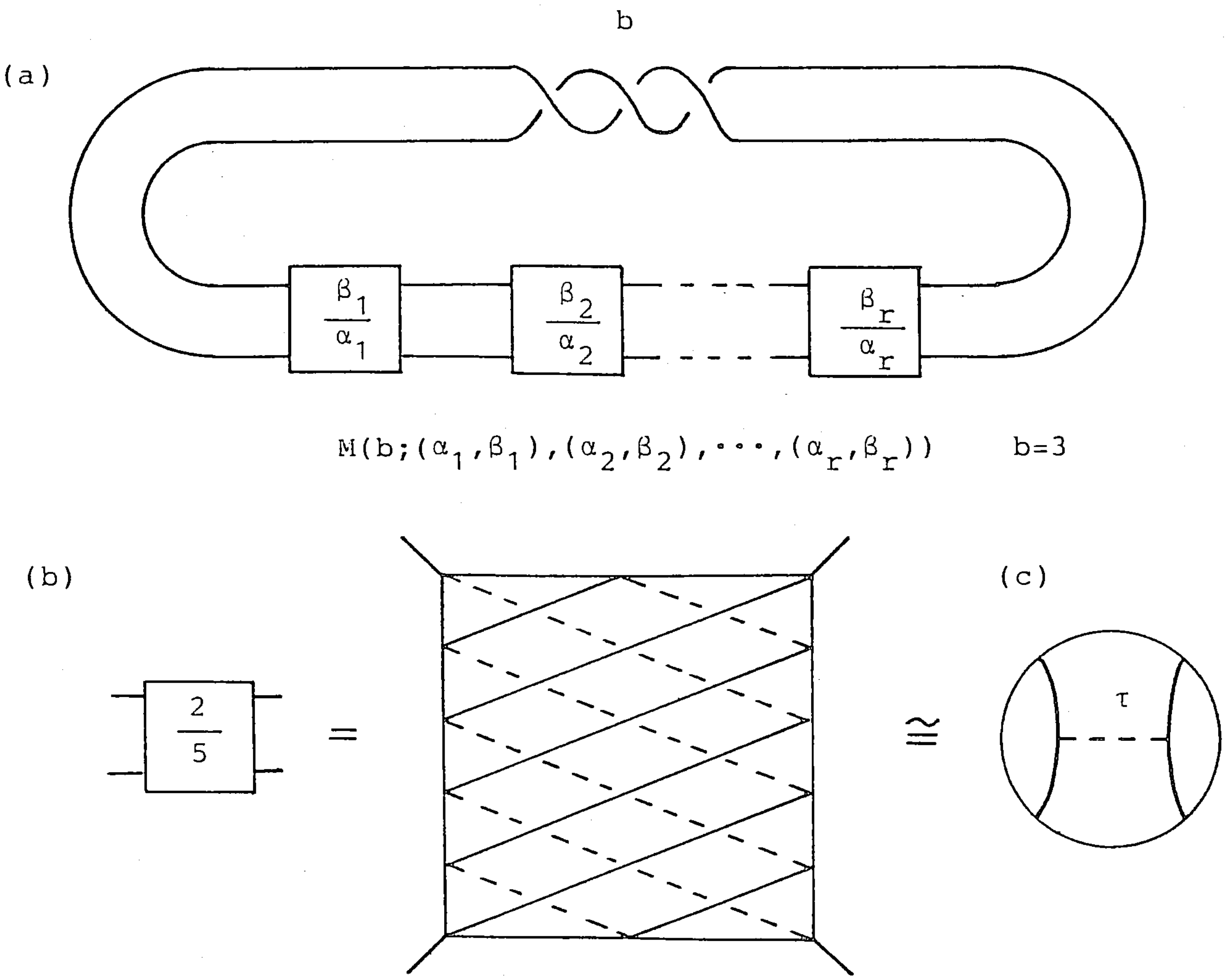


Fig. 4.2

The following proposition, which reflects the fact that the pair (S^3, K) has the structure of a *Seifert fibered orbifold*, relates the Montesinos knots to the reflection groups (see [Z], [BuZ, Chapter 12]):

Proposition 4.3. *The link group of $K = M(b; (\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_r, \beta_r))$ has a natual epimorphism to the reflection group $< \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r >$*

By using this fact, the following classification theorem of the Montesinos knots is obtained:

Proposition 4.4. *(1) Suppose $r = 2$. Then K is a 2-bridge link $S(p, q)$ of type (p, q), where $p = |b\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|$ and q is an integer relatively prime to p. In particular, K is a trivial knot, if and only if $b\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \pm 1$.*

(2) Suppose $r \geq 3$. Then K is not a 2-bridge link, and it is classified by the Euler number

$$e(K) = b - \sum_{i=1}^{r} \beta_i/\alpha_i,$$

and the vector

$$\mathbf{v}(K) = (\beta_1/\alpha_1, \cdots, \beta_r/\alpha_r) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r$$

up to cyclic permutation and reversal of the order.

In [MSY], the following result was proved:

Theorem 4.5. *Let $K = M(b; (\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_r, \beta_r))$ be a Montesinos knot (not a link) with r branches. Suppose K has tunnel number one, then one of the following conditions holds up to cyclic permutaion of the indices:*

(1) $r = 2$.

(2) $r = 3$, $\alpha_1 = 2$, and $\alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 1 \pmod 2$.

(3) $r = 3$, $\beta_2/\alpha_2 \equiv \beta_3/\alpha_3 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, and $e(K) = \pm 1/(\alpha_1\alpha_2)$.

Conversely, if the condition (1), (2), or the following (3') holds, then K has tunnel number one:

(3') $r = 3$, $\beta_2/\alpha_2 \equiv \beta_3/\alpha_3 \equiv \pm 1/3 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, and $e(K) = \pm 1/(3\alpha_1)$.

The second part of this theorem follows from Example 4.1 and Figure 4.3.

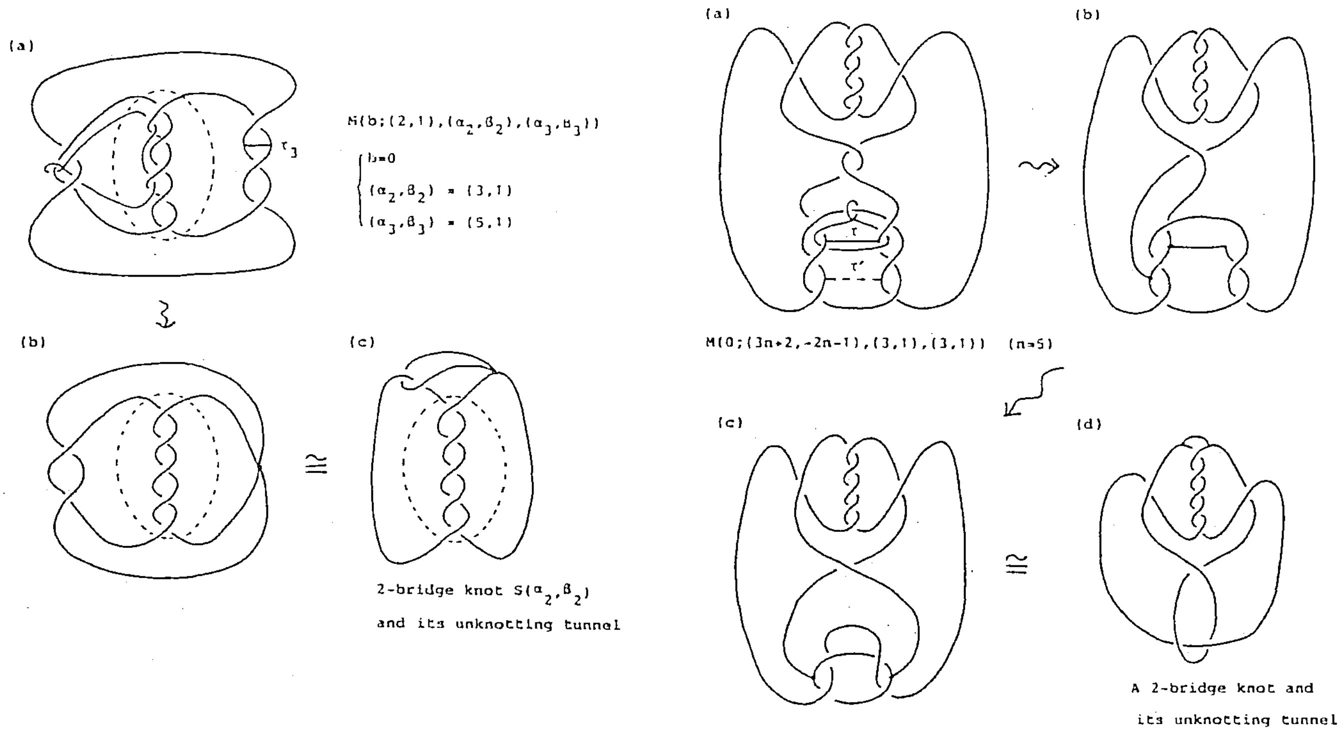


Fig. 4.3

In [MSY], we proved that the condition given in the second part of the above theorem is not a sufficient condition by using Yamada's quantum invariants of spatial graphs. However, we can now obtain the complete determination of the tunnel number one Montesinos knots by combining Theorem 1.5 and Theorem 4.5. Namely, we have:

Theorem 4.6. *A Montesinos knot $K = M(b; (\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_r, \beta_r))$ has tunnel number one, if and only if one of the following conditions holds up to cyclic permutaion of the indices:*

(1) $r = 2$.

(2) $r = 3$, $\alpha_1 = 2$, *and* $\alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 1 \pmod 2$.

(3) $r = 3$, $\beta_2/\alpha_2 \equiv \beta_3/\alpha_3 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, *and* $e(K) = \pm 1/(\alpha_1\alpha_2)$.

The tunnel number one non-hyperbolic knots were completely classified [MoS]; and recently, Bleiler [B] announced that a non-hypebolic knot K has tunnel number one if $rk(G(K)) = 2$. Thus the following problem remains:

Problem 4.7. *Let K be a hyperbolic knot with $rk(G(K)) = 2$. Then, is $t(K) = 1$? More generally, let Γ be a two-generator, discrete, torsion free, cocompact or of cofinete volume subgroup of $Isom(\mathbb{H}^3)$, and let M be the quotient space. Then is the Heegaard genus of M equal to 2?*

References

[B] S. Bleiler,, Proc. A.M.S. (1994).

[BZ] G. Burde and H. Zieschang, "Knots," De Gruyter Studies in Mathematics 5, de Gruyter, Berlin, Ney York, 1985.

[G] J. Gilman, *Two-generator discrete subgroups of $PSL(2, R)$*, preprint.

[GM] J. Gilman and B. Maskit, *An algorithm for 2-generator Fuchsian groups*, Mich. Math. J. **38** (1991), 13–32.

[J] T. Jϕrgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. **98** (1976), 739–749.

[KZ] R. Kaufmann and H. Zieschang, *On the rank of NEC groups*, in "Discrete Geometry (ed. J. Harvey and C. Maclachlan)," London Math. Soc. Lect. Note Series 173, pp.137-147.

[**Kl1**] E. Klimenko, *Discrete groups in three-dimensional Lobachevsky space generated by two rotations*, Siberian Math. J. **30** (1989), 95–100.

[**Kl2**] E. Klimenko, *A class of 2-generator subgroups of* $PSL(2,\mathbb{C})$, Siberian Math. J. **30** (1989), 723–725.

[**Kl3**] E. Klimenko, *Some remarks on subgroups of* $PSL(2,\mathbb{C})$, Q&A in General Topology **8** (1990), 371–381.

[**Kl4**] E. Klimenko, *A special class of* 2*-generator Kleinian groups*, preprint.

[**KS**] E. Klimenko and M. Sakuma, *Two-generator discrete subgroups of* $Isom(\mathbb{H}^2)$ *containing orientation-reversing elements*, preprint.

[**Kn**] A. W. Knapp, *Doubly generated Fuchsian groups*, Mich. Math. J. **15** (1968), 289–304.

[**LS**] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, "Combinatorial group theory," Ergeb. Math. Grenzgeb. **89**, Springer-Verlag, 1977.

[**Ms1**] B. Maskit, *On Poincaré's theorem for fundamental polygons*, Adv. in Math. **7** (1971), 219–230.

[**Ms2**] B. Maskit, *Some special* 2*-generator Kleinian groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 175–186.

[**MS**] B. Maskit and G. Swarup, *Two parabolic generator Kleinean groups*, Israel J. Math. **64** (1988), 257–266.

[**Mt**] J. P. Matelski, *The classification of discrete 2-generator subgroups of* $PSL(2,\mathbb{R})$, Israel J. Math. **42** (1982), 309–317.

[**MoS**] K. Morimoto and M. Sakuma, *On unknotting tunnels for knots*, Math. Ann. **289** (1991), 143–167.

[**MSY**] K. Morimoto, M. Sakuma, and Y. Yokota, *Identifying tunnel number one knots*, preprint.

[**PRZ**] N. Peczynski, G. Rosenberger, and H. Zieschang, *Über Erzeugende ebener* *disknotinuierlicher Gruppen*, Invent math. **29** (1975), 161–180.

[**P**] N. Purzitsky, *All two-generator Fuchsian groups*, Math. Z. **147** (1976), 87–92.

[**R**] G. Rosenberger, *All generating pairs of all two-generator Fuchsian groups*, Arch. Math. **46** (1986), 198–204.

[**S**] D. Singerman, *Finitely maximal Fuchsian groups*, Journal of London Math. Soc. **6** (1972), 29–38.

[**W**] R. Weidemann, Private communication at Ruhr Univ. in July, 1994.

Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk 630090, Russia
e-mail: helen@math.nsk.su

Department of Mathematics, Faculty of Science, Osaka University,
Machikaneyama-cho 1-16, Toyonaka, Osaka, 560, Japan
e-mail: sakuma@math.wani.osaka-u.ac.jp

RIEMANN 面の正則族について

HIROSHIGE SHIGA

東京工業大学　理学部

1. INTRODUCTION

本講演では有限型 Riemann 面上の有限型 Riemann 面の局所非自明な正則族を考える。すなわち，有限型の base surface B が与えられており，その各点 $p \in B$ に fiber として有限型（位相的タイプは B と異なっていてもよい）の Riemann 面 S_p が対応し，S_p が p に関して非定数正則に depend しているという状況を考える．Base surface 及び fiber の surface が共に双曲型なら、その個数は有限個しかないことが知られている。本講演ではその個数評価について考察する。

一般に上のような正則族は（定義から）base surface から fiber の moduli 空間への正則写像と見做せるが，普遍被覆をとることによって，base surface の普遍被覆面から fiber のタイヒミュラー空間への正則写像と、monodromy と呼ばれる base surface の基本群からタイヒミュラーモジュラー群への準同型の組として表現することが出来る。すなわち、$B = \mathbb{H}^2/\Gamma$ が (g, n) 型の Riemann 面（種数 g の compact Riemann 面から n 個の点を除いてもの）で base surface、与えられた正則族の fiber の Riemann 面が (g', n')型であったとすると、上半平面 $\mathbb{H}^2$ からタイヒミュラー空間 $T(g', n')$ への非定数正則写像 Φ と B を表すフックス群 Γ からタイヒミュラーモジュラー群 $Mod(g', n')$ への準同型 χ (monodromy) が存在して、任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\Phi(\gamma(z)) = \chi(\gamma)(\Phi(z)) \qquad z \in \mathbb{H}^2$$

が成立する。（このとき、Φ の取り方は $Mod(g', n')$ の作用を除いて一意的である。）

冒頭で述べたように、本講演では、

問題　B 上の (g', n') 型の Riemann 面の正則族で局所非自明なものの個数を評価せよ。

という問題を考えるが、これを上の条件を満たす正則写像の個数評価という観点から考察する。

このような議論において重要な役割を果たすのがタイヒミュラー空間の解析的性質とその境界の様相である．タイヒミュラー空間は自然な複素構造を持っており，Bers slice と呼ばれる埋込みによって，基準となる Riemann 面を表すフックス群から $PSL(2, \mathbb{C})$ への表現空間で，忠実かつその像が不連続群からなる部分空間の中に入る．そして，その境界もやはり忠実で像が不連続群 (b-group) になっている．このとき次のことが知られている．

Proposition 1 (Royden[2]). タイヒミュラー空間では *Kobayashi* 距離と *Teichmüller* 距離は等しい．

Proposition 2 (Shiga [3]). f を単位円板 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ からタイヒミュラー空間への正則写像とすると，f は境界 $\partial\Delta$ 上ほとんど至るところ *non-tangential limit* をもち，しかもその境界値は *accidental parabolic* を持たない不連続群である．特に，その境界値がタイヒミュラー空間の境界にあるとき，全退化群*(totally degenerate group)* が得られる．

2. Monodromy

上に述べたように、Riemann 面の正則族に対しては monodromy が決まるが、実はこの "逆" も言えることが知られている（より正確には，monodromy の同値類が正則族の同値類を決める）。すなわち、

Proposition 3 (Imayoshi-Shiga[2]). *Riemann* 面 B 上の (g', n') 型の *Riemann* 面の正則族で局所非自明なものが二つ与えられているとする。ここで Φ_1, $\Phi_2 : \mathbb{H}^2 \to T(g', n')$ をそれらに対応する正則写像、準同型写像 χ_1, $\chi_2 : \Gamma \to Mod(g', n')$ をその *monodromy* とする。もし、$\chi_1 = \chi_2$ ならば $\Phi_1 = \Phi_2$ である。

したがって，Riemann 面の正則族において、その monodromy の役割は決定的であることがわかる．そこで、最初に monodromy χ の像として現れる $Mod(g', n')$ の部分群はどのような性質を持っているかを考える。

Theorem 1. $\chi(\Gamma)$ は $Mod(g', n')$ の無限位数 *irreducible subgroup* である。

ここでモジュラー群の部分群が irreducible であるとは，その部分群の任意の元に対して共通の不変な（ホモトピックに独立な）曲線族が surface 上に取れないこととする．すると Ivanov の結果から、直ちに次のことが分かる。

Corollary 1. $\chi(\Gamma)$ は必ず *hyperbolic modular transformation* を含む。

他方，$\chi(\Gamma)$ の代数構造に関してはあまりよく分かっていないが，[1]，[5] の議論，クライン群に関する結果と定理 1 から次の結果を得る．

Corollary 2. $\chi(\Gamma)$ は *non-Abelian* である．

定理の証明には Introduction で挙げたタイヒミュラー空間の性質とモジュラー変換の orbit の極限として得られる b-group の考察から得られる．

Remark. Theorem 1 および Corollary 1, 2 において base surface は必ずしも有限型でなくてもよく，Green 関数を持たない Riemann 面（フックス群 Γ の単位円での作用がエルゴード的なもの）であればよい．

3. Holomorphic families of Riemann surfaces

(g, n) 型の Riemann 面の moduli 空間を $M(g, n)$ とする。$B \in M(g, n)$ に対して、B上の (g', n') 型の Riemann 面の正則族で局所非自明なものの個数を $n(B, (g', n'))$ と書くことにする。また、$M(g, n)$ の部分集合 K に対して

$$N(K, (g', n')) = \sup\{n(B, (g', n')); B \in K\}$$

とおく。

今，K が moduli 空間 $M(g, n)$ 内の compact 集合とする．すると，K に含まれる Riemann 面 B の "サイズ" は有界である．このような事実とタイヒミュラー距離が小林距離であるということから，B 上のRiemann 面の正則族があれば，その monodromy は制限を受ける．実際，「moduli 空間への正則写像の像は moduli 空間の境界に近づかない」ことが分かる．このような考察から次のことが分かる．

Proposition 4. K が $M(g,n)$ の *compact* 集合ならば、$N(K,(g',n')) < \infty$.

Base surface B の種数 $g'=0$ のときにはもっと良い結果が得られる．$g'=0$ の場合は本質的に Riemann 面の動きは punctures の動きによって決定される．puncture は base surface 上の（一般には多価）解析関数を与えるから，問題は（base surface の適当な covering での）解析関数の個数評価に帰着される．また，base surface の punctures におけるこのような解析関数の挙動は Picard の大定理から真性特異点でないことが分かる．結局，compact Riemann 面の有理型関数の個数評価の問題になる．そこで，これを解析することによって次を得る．

Theorem 2.

$$N(M(g,n),(0,n')) < \infty.$$

また、実際に (g,n,n') を使って $N(M(g,n),(0,n'))$ を上から評価することができる。さらに次のように，いくつかの特別な場合には個数評価が出来る．

Corollary 2. $HN(M(g,n),(g',0))$ で *fiber* が種数 g' の *hyperelliptic Riemann* 面からなる局所非自明な *Riemann* 面の正則族の個数をあらわすものとすると、

$$HN(M(g,n),(g',0)) < \infty.$$

特に

$$N(M(g,n),(2,0)) < \infty$$
$$N(M(g,n),(1,1)) < \infty$$
$$N(M(g,n),(1,2)) < \infty.$$

しかも、いずれの個数も具体的に評価することが出来る。

References

1. J. Birman, A. Lubotsky and J. McCarthy, *Abelian and solvable subgroups of the mapping class group*, Duke Math. J. **50** (1983), 1107–1120.
2. Y. Imayoshi and H. Shiga, *A finiteness theorem for holomorphic families of Riemann surfaces*, Holomorphic Functions and Moduli II, vol. 11, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, 1988 207–219.
3. H. L. Royden, *Automorphisms and isometries of Teichmüller space*, Advances in the theory of Riemann surfaces, vol. 66, 1970 369–383.
4. H. Shiga, *On analytic and geometric properties of Teichmüller spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 441–452.
5. H. Tanigawa, *Orbits and their accumulation points of cyclic subgroups of modular groups*, Tohoku Math. J. **43** (1991), 289–299.

「On Teichmüller space of once punctured elliptic curves」

京大 数理研　高島克幸

once punctured elliptic curves の Teichmüller space $\mathcal{T}_{1,1}$ と compact elliptic curves の Teichmüller space $\mathcal{T}_1$ は、compact elliptic curve が translation group の transitive action をもつため、自然な同一視をもつ一方 $\mathcal{T}_1$ 及び $\mathcal{T}_{1,1}$ は、それぞれ可換な lattice ($\subset \mathbb{C}$) の parameter space $\mathbb{H}$ (上半平面) 及び非可換な lattice ($\subset PSL(2,\mathbb{R})$) の parameter space $T_{1,1}$ とみなすことができる。
(但し $T_{1,1} := \{ (X,Y,Z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid X^2+Y^2+Z^2-XYZ=0 \}$，§1 参照)

$T_{1,1}$ と $\mathbb{H}$ の同一視を φ，j を絶対不変量とする。

$$\begin{tikzcd} T_{1,1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "j\circ\varphi"'] & \mathbb{H} \arrow[d, "j"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

非可換な lattice に対する $\wp, \wp'$ 関数の構成を通して、$j\circ\varphi$ に1つの表示を与えることが本講演の主結果であり、これを、一般の Teichmüller space 上の modular 関数を探る手掛かりにしたいと思っている。

---

§1. まず、$\mathcal{T}_{1,1}$ と $T_{1,1}$ の同一視について述べる。

Fact.
(1) ${}^\forall (X,Y,Z) \in T_{1,1}$ に対して、${}^\exists (A,B) \in SL(2,\mathbb{R})^2$ s.t. $\mathrm{tr}A = X$, $\mathrm{tr}B = Y$, $\mathrm{tr}AB = Z$
$[A,B] := ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ c & -1 \end{pmatrix}$

(($\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) の simultaneous conjugation を除いて一意的)

(2) (1) の (A,B) に対し $\Gamma_{(X,Y,Z)} := \langle A,B \rangle$ とすると $\Gamma_{(X,Y,Z)}$ は $\mathbb{H}$ に free に act して
$E_{(X,Y,Z)} := \Gamma_{(X,Y,Z)} \backslash \mathbb{H}$ は once punctured elliptic curve

これにより、$(X,Y,Z) \in T_{1,1}$ に対して、$E_{(X,Y,Z)}$ と A,B によって定まる $E_{(X,Y,Z)}$ 上の自然な marking を対応させることにより、$T_{1,1}$ と $\mathcal{T}_{1,1}$ は一対一に対応することが知られている。

§2. $(X,Y,Z) \in T_{1,1}$ に対して、$\Gamma := \Gamma_{(X,Y,Z)} = \langle A,B \rangle$ と $E := E_{(X,Y,Z)}$ を Fact 中にあるように1つ fix する。

$\bar{E} := E \amalg \{\infty\}$ を E の compact 化として、$\bar{E}$ 上の ∞ を始点とする elliptic integral を、E の universal cover $\mathbb{H}$ 上の holomorphic function $h : \mathbb{H} \to \mathbb{C} - L$ (L : lattice in $\mathbb{C}$) に lift する（但し $\lim_{\mathrm{Im}\, z \to \infty} h(z) = 0$ として、1つ fix する）

この時 $g(z) := \left(\frac{dh}{dz}\right)(z)$ $(z \in \mathbb{H})$ は Γ に関する weight (-2) の cusp form になる。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[d] & \mathbb{C}-L \arrow[l, hook'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{H} \arrow[l, "h"'] \arrow[d] \\ \bar{E} & & E \cong \Gamma\backslash\mathbb{H} \arrow[ll, hook'] \end{tikzcd}$$

$\Gamma_\infty := \Gamma \cap \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \right\}$ とし、

$E_2(z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \left(\frac{d\gamma}{dz}\right)(z)^2$, $E_3(z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \left(\frac{d\gamma}{dz}\right)(z)^3$

とする。(weight (-4) 及び (-6) の Eisenstein series)

また $\varphi_2 := \frac{E_2}{g^2}$, $\varphi_3 := \frac{E_3}{g^3}$ とし、$\wp_L, \wp_L'$ をそれぞれ L を period とする Weierstraß $\wp$, $\wp'$ 関数とする。

Theorem

$\exists c = c_{(X,Y,Z)} \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{H}$ に対し、

$\varphi_3(z) = -\frac{i}{16\pi^3}(\wp_L' \circ h)(z)$ —— Ⓐ , $\varphi_2(z) = -\frac{1}{4\pi^2}(\wp_L \circ h)(z) + c$ —— Ⓑ

$\lim_{\mathrm{Im}\, z \to +\infty} h(z) = 0$ であるので、Ⓐ,Ⓑ の右辺の ∞ での Fourier 展開は、

h の Fourier 展開と、$\wp_L, \wp_L'$ の原点での Laurent 展開

($g_2 := 60 \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$, $g_3 := 140 \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$ によって表示可能) で決まる。

Ⓐ,Ⓑ の両辺の Fourier 係数の比較によって、$j = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$ を

E_2, E_3 の低次の Fourier 係数の有理式で与えた次の Proposition が、本講演の主結果である。

Proposition 5.1

$^\forall(X,Y,Z)\in T_{1,1}$ に対し

$$(j\circ\varphi)(X,Y,Z)=\frac{16\,G_2^3}{16G_2^3-G_3^2}\qquad \left(\begin{array}{ccc} T_{1,1} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{H} \\ & j\circ\varphi \searrow \quad \swarrow j & \\ & \mathbb{C} & \end{array}\right)$$

但し G_2, G_3 は

$\Gamma(\subset SL(2,\mathbb{R}))=\langle A,B\rangle$ s.t. $\mathrm{tr}A=X$, $\mathrm{tr}B=Y$, $\mathrm{tr}AB=Z$

$[A,B]=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

に対する Eisenstein series E_2, E_3 の Fourier 展開

$E_2=\sum_{n=0}^{\infty} s_{2n}q^{2n}$, $E_3=\sum_{n=0}^{\infty} k_{2n}q^{2n}$ の係数 $(q=e^{2\pi i z},\ z\in\mathbb{H})$

によって

$$G_2:=-6k_4+9s_4+7k_2^2-9k_2s_2$$

$$G_3:=-108k_6+162s_6+234k_4k_2-81k_4s_2$$
$$-162k_2s_4-81s_4s_2-122k_2^3+81k_2^2s_2$$
$$+81k_2s_2^2$$

とする

Some approaches to Galois image in braid groups
(組み紐群への Galois 表現の像の大きさの上界への肉薄)

角皆 宏 (早大理工)

1995 年 6 月 14 日

本講演では、組み紐群への Galois 表現である外 Galois 表現の像の特徴付けや大きさの評価について、$\mathbb{P}^1$ に付随する場合に関する従来の結果を紹介し、楕円曲線に付随する場合に関する演者の最近の試みの報告を行う。

1. $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ から生ずる Galois 表現と Grothendieck-Teichmüller 群 $\widehat{GT}$

$X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ とする。$X(\boldsymbol{C})$ の位相的基本群 $\pi_1(X(\boldsymbol{C}),*)$ は階数 2 の自由群 F_2 と同型であり、F_2 の表示 $F_2 = \langle x,y,z | xyz=1\rangle$ を固定する時、x,y,z が夫々 $0,1,\infty$ を一回りする道を表わすように同一視出来る。$\bar{\boldsymbol{Q}}$ 上の代数的基本群 $\pi_1(X_{\bar{\boldsymbol{Q}}},*)$ は F_2 の副有限完備化 $\hat{F}_2$ と同型である。$\boldsymbol{Q}$ 上で考えれば次の homotopy 短完全列

$$(1) \qquad 1 \longrightarrow \pi_1(X_{\bar{\boldsymbol{Q}}},*) \longrightarrow \pi_1(X_{\boldsymbol{Q}},*) \longrightarrow G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow 1$$

($G_{\boldsymbol{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ は $\boldsymbol{Q}$ の絶対 Galois 群) を生じ、これから自然に Galois 表現

$$(2) \qquad \varphi_X : G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}\hat{F}_2$$

を得る (Out は外部自己同型群)。これは単射であることが判っている。$G_{\boldsymbol{Q}}$ の作用は x,y,z の生成する巡回群の共役類を夫々保つので、像 $\varphi_X(G_{\boldsymbol{Q}})$ は「組み紐的外部自己同型群」

$$(3) \qquad \mathrm{Out}^\flat\hat{F}_2 = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\hat{F}_2 | \sigma(x)\sim x^\lambda, \sigma(y)\sim y^\lambda, \sigma(z)\sim z^\lambda (\exists\lambda\in\hat{\boldsymbol{Z}}^\times)\}/\mathrm{Int}\hat{F}_2$$

($\sim$ は $\hat{F}_2$ 内での共役) に含まれる。$\mathrm{Out}^\flat\hat{F}_2$ の各元に対し、$\sigma(x)=x^\lambda, \sigma(y)\approx y^\lambda$ ($\approx$ は $\hat{F}_2$ の交換子群 $\hat{F}_2' = [\hat{F}_2,\hat{F}_2]$ による共役) となるような $\mathrm{Aut}\hat{F}_2$ への持上げが一意に取れる (基本群の基点として "tangential base point" $\overrightarrow{01}$ を選ぶことに対応) ので、

$$(4) \qquad G_{\boldsymbol{Q}} \hookrightarrow \mathrm{Aut}^*\hat{F}_2 = \left\{\sigma\in\mathrm{Aut}\hat{F}_2 \,\middle|\, \begin{array}{c}\sigma(x)=x^\lambda, \sigma(y)=fy^\lambda f^{-1}, \sigma(z)=gz^\lambda g^{-1}\\ (\lambda\in\hat{\boldsymbol{Z}}^\times, f\in\hat{F}_2', g\in\hat{F}_2)\end{array}\right\}$$

を得る。これにより $G_{\boldsymbol{Q}}$ の元は $(\lambda,f)\in\hat{\boldsymbol{Z}}^\times\times\hat{F}_2'$ により座標付けられる。λ は円分指標と一致する。次が最も基本的な問題である。

<u>Galois 像を $(\lambda,f)\in\hat{\boldsymbol{Z}}^\times\times\hat{F}_2'$ の言葉で特徴付けよ</u>

この問いに対し現在知られている結果は次である。

<u>定理</u>. Galois 像 $\varphi_X(G_{\boldsymbol{Q}})$ は、次なる群 $\widehat{GT}$ (Grothendieck-Teichmüller 群) に含まれる。

$$(5) \qquad \widehat{GT} = \left\{\sigma\in\mathrm{Aut}\hat{F}_2 \,\middle|\, \begin{array}{c}\sigma(x)=x^\lambda, \sigma(y)=fy^\lambda f^{-1}\ (\lambda\in\hat{\boldsymbol{Z}}^\times, f=f(x,y)\in\hat{F}_2')\\ \text{s.t. (i),(ii),(iii)}\end{array}\right\}$$

(i) $f(x,y)f(y,x)=1$
(ii) $f(z,x)z^m f(y,z)y^m f(x,y)x^m = 1$ (ここに $\lambda = 2m+1$)
(iii) $\hat{P}_5$ 内で $f(x_{12},x_{23})f(x_{34},x_{45})f(x_{51},x_{12})f(x_{23},x_{34})f(x_{45},x_{51})=1$

$\hat{P}_5$ 及び x_{ij} の定義も含めて、以下に概略を述べる。

$n > 3$ とし $\mathbf{P}^1$ 上の異なる n 点の順序付き配置の同型類を $M_{0,n}$ と書く。

$$M_{0,n} = \{(p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbf{P}^1)^n | p_i \neq p_j (i \neq j)\}/\mathrm{PGL}(2) \tag{6}$$

(ここに PGL(2) は 1 次分数変換として $\mathbf{P}^1$ に作用し $\mathrm{Aut}\mathbf{P}^1 \simeq \mathrm{PGL}(2)$。) 特に最初の 3 点を夫々 $0, 1, \infty$ に移すことにより、

$$M_{0,n} \simeq \{(p_4, \ldots, p_n) \in (\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^{n-3} | p_i \neq p_j (i \neq j)\} \tag{7}$$

となる。特に $M_{0,4} = \mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\} = X$ である。$\boldsymbol{C}$ 上で考えると複素 $n-3$ 次元多様体であり、位相的基本群 $P_n = \pi_1(M_{0,n}(\boldsymbol{C}), *)$ は n 本紐の球面純組み紐群をその中心で割った群と同型であり、2 本の紐の単純一絡み x_{ij} $(1 \geq i, j \geq n)$ で生成される。例えば、$P_4 \simeq F_2, P_5 \simeq F_2 \ltimes F_3$ など (ここに F_n は階数 n の自由群)。$\bar{\boldsymbol{Q}}$ 上の代数的基本群 $\pi_1(M_{0,n}(\bar{\boldsymbol{Q}}), *)$ は P_n の副有限完備化 $\hat{P}_n$ と同型である。X の時と同様に homotopy 短完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(M_{0,n}(\bar{\boldsymbol{Q}}), *) \longrightarrow \pi_1(M_{0,n}(\boldsymbol{Q}), *) \longrightarrow G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow 1 \tag{8}$$

から自然に次の Galois 表現を得る。

$$\varphi_n : G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}\hat{P}_n \tag{9}$$

$G_{\boldsymbol{Q}}$ の作用は各 $x_{i,j}$ の生成する巡回群の共役類を保つ。そのような外部自己同型からなる部分群を $\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_n$ と書けば、像 $\varphi_n(G_{\boldsymbol{Q}})$ は $\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_n$ に含まれる。

1 点を忘れることから自然な射 $M_{0,n+1} \to M_{0,n}$ が定まる。これから引起こる射 $\hat{P}_{n+1} \to \hat{P}_n$ は組み紐の紐を 1 本忘れることに相当する。更に $\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_{n+1} \to \mathrm{Out}^\flat \hat{P}_n$ が引起こり、φ_{n+1} とこれとの合成は φ_n と一致する。

φ_n による Galois 像を上から評価するために、$M_{0,n}$ の持つ対称性に着目する。点の入れ替えにより n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が $M_{0,n}$ に作用し、これから定まる $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{Out}\hat{P}_n$ によって、内部共役で $\mathfrak{S}_n$ が $\mathrm{Out}\hat{P}_n$ 及び $\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_n$ に作用している。$M_{0,n}$ への作用は $\boldsymbol{Q}$ 上定義されるので $G_{\boldsymbol{Q}}$ の作用と可換である。以上から次の系列を得る。

$$\begin{aligned} &G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow \cdots \\ &\longrightarrow (\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_6)^{\mathfrak{S}_6} \longrightarrow (\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_5)^{\mathfrak{S}_5} \longrightarrow (\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_4)^{\mathfrak{S}_4} \subset \mathrm{Out}^\flat \hat{F}_2 \simeq \mathrm{Aut}^* \hat{F}_2 \end{aligned} \tag{10}$$

従って、$\mathrm{Aut}^* \hat{F}_2$ 内の Galois 像は、全ての $n \geq 4$ について $(\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_n)^{\mathfrak{S}_n}$ の像に含まれる。$n = 4$ での $\mathfrak{S}_4$- 対称性 (実は $X = M_{0,4}$ への $\mathfrak{S}_4$ の作用は Klein の四元群による商である $\mathfrak{S}_3$ を通過するので、実質は $\mathfrak{S}_3$- 対称性) から定理の (i),(ii) が、$n = 5$ での $\mathfrak{S}_5$- 対称性から (iii) が得られる。然し、$n \geq 5$ では $(\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_{n+1})^{\mathfrak{S}_{n+1}} \longrightarrow (\mathrm{Out}^\flat \hat{P}_n)^{\mathfrak{S}_n}$ が全射であることが知られているので、$n \geq 6$ の所からは新たな関係式は得られない。

$n = 5$ から来る条件 (iii) が実際に新たな条件となっていることは、filtration による次数商の大きさを見ることで知られる。

2. FILTRATION による次数商の大きさ (階数) の評価

この節以下では主に副 l の場合を考えるので、F_n, P_n などは副 l 完備化されたものとする。

$\{F_2(m)\}_{m\geq 1}$ を F_2 の降中心列とする。

(11) $$F_2(1) = F_2, \quad F_2(m+1) = [F_2, F_2(m)] \ (m \geq 1)$$

隣接商 $\mathrm{gr}^m F_2 = F_2(m)/F_2(m+1)$ は有限生成自由 $\boldsymbol{Z}_l$- 加群、$\mathrm{Gr}F_2 = \bigoplus_{m\geq 1} \mathrm{gr}^m F_2$ には自然に Lie 環の構造が入り、$\bar{x} = x \bmod F_2(2), \bar{y} = y \bmod F_2(2)$ が生成する自由 Lie 環となる。これに付随して、$\Phi = \mathrm{Out}^\flat \hat{F}_2$ の部分群列 $\{\Phi(m)\}_{m\geq 0}$ を次で定める。($\underset{m}{\sim}$ は $F_2(m)$ の元による共役)

(12) $$\Phi(0) = \Phi$$
$$\Phi(m) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}F_2 \big| \sigma(x) \underset{m}{\sim} x, \sigma(y) \underset{m}{\sim} y, \sigma(z) \underset{m}{\sim} z\}/\mathrm{Int}F_2$$

すると $\{\Phi(m)\}_{m\geq 0}$ も降中心的となり、$\Phi(0)/\Phi(1) \simeq \boldsymbol{Z}_l^\times$、$m \geq 1$ に対して $\mathrm{gr}^m\Phi = \Phi(m)/\Phi(m+1)$ は有限生成自由 $\boldsymbol{Z}_l$- 加群、$\mathrm{Gr}\Phi = \bigoplus_{m\geq 1} \mathrm{gr}^m\Phi$ には自然に Lie 環の構造が入る。$\mathrm{gr}^m F_2, \mathrm{gr}^m \Phi$ の階数については公式が知られている。

$\varphi_X : G_{\boldsymbol{Q}} \to \Phi$ によって、この filtration を引戻す。

(13) $$G_{\boldsymbol{Q}}(m) = \mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q}(m)) = \varphi_X^{-1}(\Phi(m))$$

こうして $\boldsymbol{Q}(1) = \boldsymbol{Q}(\mu_{l^\infty})$ 上の中心拡大の塔 $\{\boldsymbol{Q}(m)\}_{m\geq 1}$ が定まる。これは l の外不分岐である。$\mathrm{gr}^m\mathcal{G} = G_{\boldsymbol{Q}}(m)/G_{\boldsymbol{Q}}(m+1) = \mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(m+1)/\boldsymbol{Q}(m)), \mathcal{G} = \bigoplus_{m\geq 1} \mathrm{gr}^m\mathcal{G}$ とおくと、次数 Lie 環の包含射

(14) $$\mathcal{G} \hookrightarrow \mathrm{Gr}\Phi$$

を得る。前節の問いは次のように言い直せる。

<u>各 m に対し Galois 像の大きさ $r_m = \mathrm{rank}_{\boldsymbol{Z}^l}\mathrm{gr}^m\mathcal{G}$ を決定せよ</u>

下からの評価は非自明な Galois 像を構成することによって、上からの評価は $\mathrm{Gr}\Phi$ の群論を詳しく調べることによって、夫々得られる。各 m : 奇数 ≥ 3 に対し高次 l 円単数から生ずる Soulé 元と呼ばれる非自明な元 $\sigma_m \in \mathrm{gr}^m\mathcal{G}$ が存在し、更に $m_{k-1} \neq m_k$ の時 $[\sigma_{m_1}, [\cdots, [\sigma_{m_{k-1}}, \sigma_{m_k}]\cdots]] \neq 0$ となることから多くの非自明元が構成される。これにより下からの評価を得る。

<u>予想</u>. Galois Lie 環 $\mathcal{G}$ は σ_m (m : 奇数 ≥ 3) が生成する自由 Lie 環であろう。

上からの評価は $\mathrm{gr}^m\Phi$ について $\widehat{GT}$ の 3 条件に相当する条件を満たす部分加群の階数を調べることによって得られる。小さい m に対しては両者の評価が一致し、r_m が決定されている。これは上の予想に合致する。特に、$\widehat{GT}$ の 3 条件のうち (i),(ii) のみを満たし (iii) を満たさないものが存在することから、この $\mathfrak{S}_5$- 対称性が本質的に新たな条件であり、Galois 像の評価に影響を与えていることは特筆すべきことである。

3. 楕円曲線に付随する GALOIS 表現についての試み

$\boldsymbol{Q}$ 上定義された楕円曲線 E を 固定し、$\boldsymbol{Q}$- 有理点 O を原点として取って $C = E \setminus \{O\}$ とする。$\bar{\boldsymbol{Q}}$ 上の副 l 基本群 $\pi_1(C_{\bar{\boldsymbol{Q}}}, *)$ は階数 2 の自由副 l 群 F_2 で、表示 $F_2 = \langle x, y, z | [x, y]z = 1\rangle$ に於いて、x, y が homology 群の基底に、z が O を一回りする道に、夫々対応するように同一視できる。C に付随する Galois 表現

$$\varphi_C : G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}\pi_1(C_{\bar{\boldsymbol{Q}}}, *) \tag{15}$$

の像は、z が生成する巡回群の共役類を保つものからなる部分群 $\mathrm{Out}^{\flat}\pi_1(C_{\bar{\boldsymbol{Q}}}, *)$ に含まれる。この Galois 像の大きさを上から評価するのに $\mathbf{P}^1$ の場合に倣って以下のような構想を立てよう。

$n > 2$ とし E 上の異なる n 点の順序付き配置の平行移動での同値類を (仮に) E_n と書こう。

$$E_n = \{(p_1, \ldots, p_n) \in E^n | p_i \neq p_j (i \neq j)\}/E \tag{16}$$

特に最初の点を原点 O に移すことにより、

$$E_n \simeq \{(p_2, \ldots, p_n) \in C^{n-1} | p_i \neq p_j (i \neq j)\} \tag{17}$$

となる。特に $E_2 = C$ である。各 n に対し Galois 表現

$$\varphi_n : G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow \mathrm{Out}^{\flat}\pi_1(E_n(\boldsymbol{Q}), *) \tag{18}$$

が定義される。

(-1) 倍自己同型と点の入れ替えとにより $\{\pm 1\} \times \mathfrak{S}_n$ が E_n に作用し、従って $\mathbf{P}^1$ の時と同様に $\mathrm{Out}^{\flat}\pi_1(E_n(\bar{\boldsymbol{Q}}), *)$ に共役で作用する。E_n への作用が $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 上定義されることから、Galois 像 $\varphi_n(G_{\boldsymbol{Q}})$ と $\{\pm 1\} \times \mathfrak{S}_n$ の像とは可換であり、1 点を忘れる射と併せて次の系列を得る。

$$G_{\boldsymbol{Q}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow (\mathrm{Out}^{\flat}\pi_1(E_3(\bar{\boldsymbol{Q}}), *))^{\{\pm 1\} \times \mathfrak{S}_3} \longrightarrow (\mathrm{Out}^{\flat}\pi_1(E_2(\bar{\boldsymbol{Q}}), *))^{\{\pm 1\} \times \mathfrak{S}_2} \tag{19}$$

問：$n > 1$ に対し

$$(\mathrm{Out}^{\flat}\pi_1(E_{n+1}(\bar{\boldsymbol{Q}}), *))^{\{\pm 1\} \times \mathfrak{S}_{n+1}} \to (\mathrm{Out}^{\flat}\pi_1(E_n(\bar{\boldsymbol{Q}}), *))^{\{\pm 1\} \times \mathfrak{S}_n}$$

は全射であるか？

もし全射でなければ、E_n $(n > 3)$ を考えることで Galois 像に新たな条件を見つけたことになる。この問いに対して前節のような Lie 環の方法による接近を試みる。

1995 年 5 月 16 日 筆

3次元球面の **HEEGAARD** 分解と写像類群

廣瀬 進

佐賀大学理工学部数学科

H_g, H_g^* を種数 g のハンドル体（3-ball に g-個の 1-handle を接合して構成される向き付け可能な3次元多様体）とします。$H_g \cup H_g^*$ を3次元球面の Heegaard 分解とします。ここで、

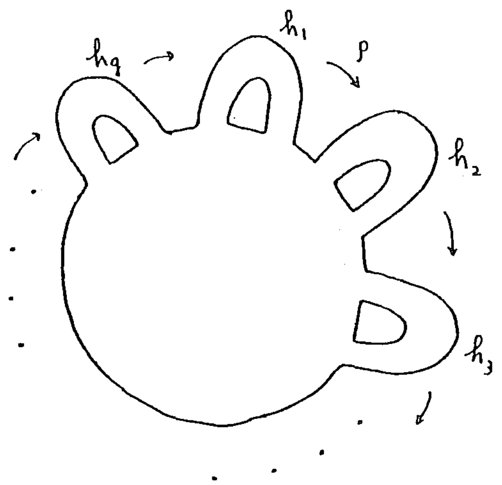
$$\mathcal{E}_g = \left\{ \phi \in \pi_0(Diff^+(\partial H_g)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{3次元球面上の向きを保つ自己同相写像}\Phi\text{で} \\ \Phi|_{\partial H_g} = \phi\text{となるものが存在する} \end{array} \right\}$$

なる群の構造についていくつか分かったことを報告します。まずは、この群は有限生成となっています。すなわち、次の定理が示されました：

定理 **A.** $\mathcal{E}_g$ は4つの元 $\rho, \omega_1, \rho_{12}, \theta_{12}$ によって生成される。

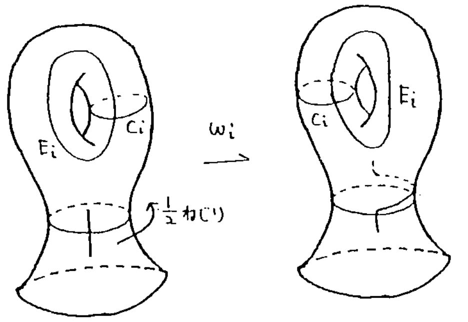
但し、これらの元は、次の図の様にして定義されるものです。

(1) ρ: cyclic translation of H_g

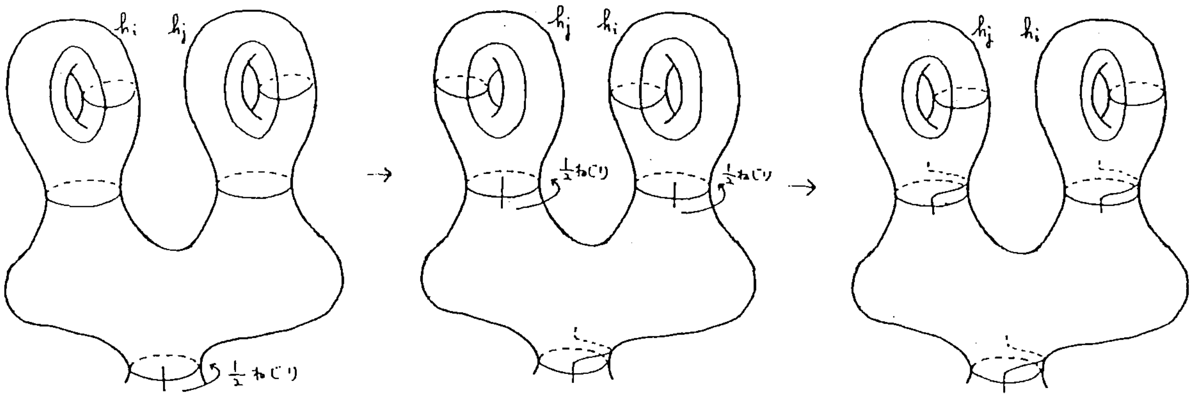


Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(2) ω_i: twisting a knob of H_g

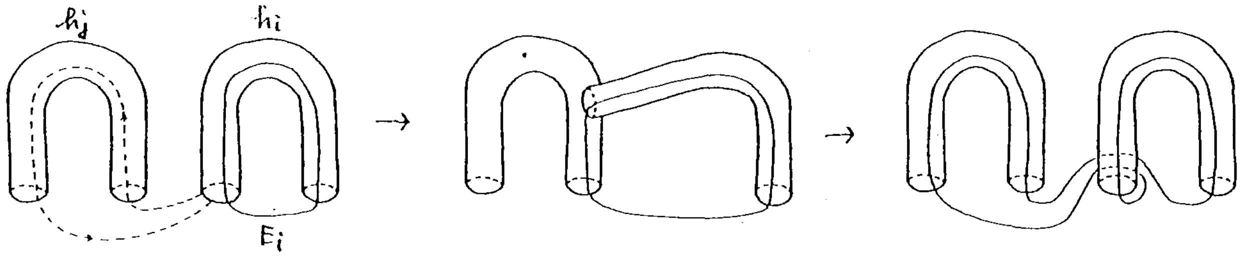


(3) ρ_{ij}: interchanging two knobs of H_g



(4) θ_{ij}: sliding of H_g

破線に沿って h_i のあしをすべらせる。



$\mathcal{E}_g$ の $\pi_1(H_g, *)$ への作用が誘導する自然な全射準同型$\alpha : \mathcal{E}_g \to \mathrm{Out}(\pi_1(H_g, *))$ があります。また、同様にして、自然な全射準同型$\alpha^* : \mathcal{E}_g \to \mathrm{Out}(\pi_1(H_g^*, *))$ 更には、$\beta : \mathcal{E}_g \to \mathrm{Aut}(H_1(H_g; \mathbb{Z}))$ を定めることが出来ます。ここで、$\mathcal{K}_g = \ker \alpha$ (resp. $\mathcal{K}_g^* = \ker \alpha^*$) なる群について、次のことが分かります：

定理 B. *$\mathcal{K}_g$ (resp. $\mathcal{K}_g^*$) は H_g (resp. H_g^*) 上の ball-twisting によって生成される。*更に、この群は有限生成ではない。

また、$\mathcal{I}_g = \ker\beta$ なる群については、次のことが分かります：

定理 **C.** $\mathcal{I}_g$ は H_g 上の *ball-twisting* と H_g^* 上の *ball-twisting* によって生成される。更に、$\mathcal{I}_g = \mathcal{E}_g \cap (\partial H_g$上の *Torelli* 群$)$ が成り立つ。

但し、H_g (resp. H_g^*) 上の ball-twisting とは次の様にして定義されるものです：$\mathcal{B}$ を 3 次元球面に埋め込まれた 3-ball で、H_g や H_g^* との交わりが下の図の様になっているものとします。$\mathcal{B}$ 上に極座標 (r,θ,φ) が、図 1 においては、$\partial\mathcal{B}\cap H_g$ (resp. $\partial\mathcal{B}\cap H_g^*$) が、$\{(1,\theta,\varphi)|\pi/2 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ で表され、図 2 においては、$\partial\mathcal{B}\cap H_g$ (resp. $\partial\mathcal{B}\cap H_g^*$) が、$\{(1,\theta,\varphi)|0 \leq \theta \leq \pi/4 \text{ or } 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ で表される様に入っているものとした時、H_g (resp. H_g^*) 上の ball-twisting とは、極座標で次のように表示されるものです。(ただし、ϵ' は十分小さい正の実数)

$$(r,\theta,\varphi) \mapsto \begin{cases} (r,\theta,\varphi+2\pi(1-r)/\epsilon'), & 1-\epsilon' \leq r \leq 1 \\ (r,\theta,\varphi), & 0 \leq r \leq 1-\epsilon' \end{cases}$$

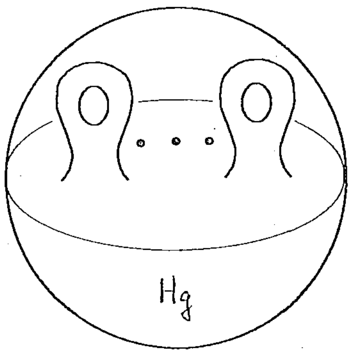


図 1

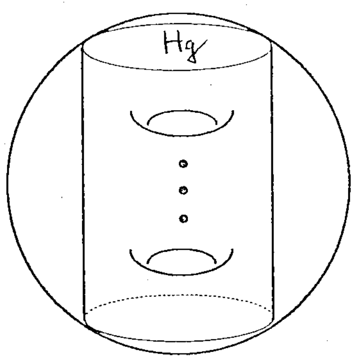


図 2

Department of Mathematics Faculty of Science and Engineering Saga University Saga, 840 Japan

E-mail address: hirose@ms.saga-u.ac.jp

GALOIS ACTIONS ON BRAID TYPE GROUPS

京大数理解析研究所助手・松本 眞

Abstract. 数体の絶対ガロア群（整数論的対象）が、代数的基本群（位相幾何的対象）へ作用することから色々な数学が派生します。特に基本群として組紐群やその仲間を選んだ時の作用について説明します。

1. Introduction

1.1. 釈迦に説法：位相幾何のモノドロミー. $f : F \to B$ を（例えば複素多様体の）スムースな族とします。（B は連結で、各点の fiber は連結で非特異。）B 上に一点 b_0 を取り、それ上の fiber を $X_0 := f^{-1}(b_0)$ とします。X_0 上にも基点 x_0 を取ります。ここで、$\pi_1(X_0, x_0) \to \pi_1(F, x_0)$ の単射性を仮定しますと、次のようにしてモノドロミー表現

$$\rho_{F/B} : \pi_1(B, b_0) \to \mathrm{Out}\pi_1(X_0, x_0) := \mathrm{Aut}\pi_1(X_0, x_0)/\mathrm{Inn}\pi_1(X_0, x_0)$$

が定義されます: $\pi_1(B, b_0)$ の元 γ が与えられたとし、これの $\xi_0 \in \pi_1(X, x_0)$ への作用を次で定義します。まず、γ は B の道ですので、これに沿って fiber が連続に変形していきます。さて、f のスムースさから、F の中の道 $\tilde{\gamma}$ であって、その像が γ に一致し、終点（都合により始点でない）を x_0 とするものがあります。すると、ξ_0 は X_0 上の x_0 を始終点とする閉曲線でしたが、これも fiber の変形に沿って、各 fiber 内で、$\tilde{\gamma}$ とその fiber との交わりを始終点とする閉曲線として滑らかに変形できます。（無理に難しくいえば、被覆ホモトピー性質を使って。）$\tilde{\gamma}$ の始点を $x_1 \in X_0$ とおくならば、この変形によって ξ_0 は、x_1 を始終点とする X_0 上のある閉曲線 ξ_1 に変形されます。こうして、

$$\pi_1(X_0, x_0) \to \pi_1(X_0, x_1); \quad \xi_0 \mapsto \xi_1$$

が定義されました。

あとは、x_0 から x_1 への X_0 内での道 p_{01} を一つとり、

$$\pi_1(X_0, x_1) \to \pi_1(X_0, x_0); \quad \xi_1 \mapsto p_{01}\xi_1 p_{01}^{-1}$$

を定義して、合成により

$$\rho_{F/B}(\gamma) \in \mathrm{Aut}\pi_1(X_0, x_0); \quad \xi_0 \mapsto p_{01}\xi_1 p_{01}^{-1}$$

が定められます。p の取り方には $\pi_1(X_0, x_0)$ の元を左から掛ける自由度がありますので、$\rho_{F/B}(\gamma)$ は実際には $\mathrm{Inn}\pi_1(X_0, x_0)$ の積の自由度が残りますが、$\mathrm{Out}\pi_1(X_0, x_0)$ の元としては一意に定まり、モノドロミー表現を与えることがわかります。

幾何的な定義をしましたが、群論的には単に次のように定義されます。

$$X_0 \to F \to B$$

からホモトピー完全系列

$$1 \to \pi_1(X_0, x_0) \to \pi_1(F, x_0) \to \pi_1(B, b_0) \to 1 \tag{1.1}$$

が得られます。（左の単射性は仮定しました。）$\gamma \in \pi_1(B, b_0)$ を全射性により $\gamma' \in \pi_1(F, x_0)$ に持ち上げて（上でいうと $\gamma' = p_{01}\tilde{\gamma}$）、

$$\rho_{F/B}(\gamma) \in \mathrm{Aut}(\pi_1(X_0, x_0)); \quad \xi_0 \mapsto \gamma'\xi_0{\gamma'}^{-1}$$

と定義します。（$\pi_1(X_0, x_0)$ がトータルスペースの基本群の正規部分群であることを使う。この定義で上と一致することは、$\tilde{\gamma}\xi_0\tilde{\gamma}^{-1}$ と ξ_1 が F でホモトピー同値になっていることを注意するだけ。）

持ち上げ γ' の自由度は左から $\pi_1(X_0, x_0)$ の元を掛ける分だけありますから、外部自己同型に落として $\rho_{F/B}(\gamma) \in \mathrm{Out}\pi_1(X_0, x_0)$ とすれば well defined で、群準同型になることも容易に確かめられます。

上の定義は純群論的ですから、任意の群の短完全列

$$1 \to \Pi \to \Gamma \to G \to 1$$

に対して $\rho : G \to \mathrm{Out}\Pi$ が定義されます。

1.2. 受け売り：代数的基本群の場合. Grothendieck の代数的基本群は、上のような話を純代数的に取り扱う理論です。枠組みは「スキーム」のカテゴリーで、正確な定義を与えることもここではできませんが、たとえばスキームには次のような性質があります。

(i) 可換環 A に対して、それを「関数」としてもつスキーム Spec$A$ がある。
(ii) 任意のスキームは上のようなものを張り合わせてつくられる。
(iii) スキームの間には射が定義されて、スキームの圏がある。
(iv) スキームや射には、いろいろな性質、連結だとかスムースだとか有限だとか不分岐だとかいう概念が定義される。
(v) スキームの射にはファイバー積が定義される。
(vi) 例えば複素代数多様体はみなスキームとみなされ、そこに限ると上記の性質は通常の複素幾何での性質と一致する。

例えば、A が体[1] K のとき、Spec$K$ はスキームの一例で、台集合は一点であり、その点の上に関数 K がのっています。代数的閉体 $\bar{K}$ から得られる Spec$\bar{K}$ を幾何的点といい、スキーム X の幾何的点とは、幾何的点から X への射のことをいいます。

代数的基本群の定義もやはり与えられませんが、次のような性質を持ちます。

(i) （基本群がある）X を連結なスキーム、x をその幾何的点の一つとしたとき、代数的基本群 $\pi_1^{alg}(X, x)$ が定義される。
(ii) （幾何的な基本群）X が複素数体上、あるいは複素数体の部分体で代数閉なもの（例えば $\overline{\mathbb{Q}}$ で定義された連結代数多様体ならば、その代数的基本群は通常の複素位相での $\pi_1(X, x)$ を profinite 完備化[2]して得られる。従って、この場合には本質的には複素位相の基本群を考えれば良い。）

[1] 以下、簡単のため体といったら標数 0 とします。つまり、$\mathbb{Q}$ を含むとします。

[2] 与えられた群 G に対し、その profinite 完備化 $\widehat{G} = G^{\wedge}$ は射影極限 $\lim_N G/N$、ここに N は G の正規部分群で商が有限なものを全て走る。G/N に離散位相をいれて、位相空間の圏で極限をとると、$\widehat{G}$ はコンパクト位相群になる。

(iii) (数論的な基本群) K を体、Ω を K を含む代数閉体とする。$K \hookrightarrow \Omega$ によって、幾何的点 $x : \mathrm{Spec}\Omega \to \mathrm{Spec}K$ が定まる。(どちらも一点だけど、乗ってる関数が $\mathrm{Spec}\Omega$ の方が大きい。$K \hookrightarrow \Omega$ は、関数の「引き戻し」と考えられる。) このとき、次の標準的な同型がある。

$$\pi_1^{alg}(\mathrm{Spec}K, x) \cong \mathrm{Gal}(\bar{K}/K),$$

ここに $\bar{K}$ は Ω での K の代数閉包、$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ はガロア群[3]。(Spec$K$ は一点なのに、基本群が自明にならないのは変ですが、なんか点に数論的構造が入っているので、基本群が残る、とでも考えるしかありません。一方、幾何的点は、基本群が定義から自明になります。幾何的点は、幾何的な意味での十分小さい「一点」とみなせます。)

(iv) $\pi_1^{alg}(X, x)$ は、基点付き位相空間たちが満たすような関手性を満たす。

(v) ホモトピー完全系列の類似も (かなり) 成り立つ。

1.3. 外ガロア表現. V を体 K 上の (幾何的) 連結非特異代数多様体とします。すると、スキームでいうと

$$V \to \mathrm{Spec}K$$

なるスムースな射があります。(関数でいうと、K を V 上の定数関数体と考えることに対応する。) これが、最初に述べたトータルスペースとベース $F \to B$ の類似です。$B = \mathrm{Spec}K$ 上の幾何的点をとることは、K の代数閉包 $\bar{K}$ を一つ決めること、すなわち $b_0 : \mathrm{Spec}\bar{K} \to \mathrm{Spec}K$ を決めることに他かなりません。ファイバー X_0 は、ファイバー積

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \to & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\bar{K} & \to & \mathrm{Spec}K \end{array}$$

により与えられますが、スキームの圏でのファイバー積の定義から、$X_0 = \bar{V} := V \otimes \bar{K}$、すなわち、$V$ の定数体を $\bar{K}$ にとりかえて得られる多様体 $\bar{V}$ になります (いわゆる係数拡大)。$x_0 : \mathrm{Spec}\bar{K} \to \bar{V}$ を幾何的点とすると、ホモトピー完全系列

$$1 \to \pi_1^{alg}(\bar{V}, x_0) \to \pi_1^{alg}(V, x_0) \to \pi_1^{alg}(\mathrm{Spec}K, b_0) \to 1 \tag{1.2}$$

が得られます。すると、§§1.1で述べた群論的定義によって、モノドロミー

$$\rho_{V/K} : \pi_1^{alg}(\mathrm{Spec}K, b_0) \to \mathrm{Out}\pi_1^{alg}(\bar{V}, x_0)$$

が得られます。この表現を、外ガロア表現と呼んだりします。左の群が $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ というなじみのある (?) ガロア群であること、右の群が単に V を複素多様体と見て得られる基本群 $\pi_1^{top}(V, x_0)$ というなじみのある群の profinite 完備化 $\pi_1^{top}(V, x_0)^\wedge$ であることを注意しておきます。

もし、$F \to B$ に対して section $s : B \to F$ がとれると、(特にその場合 x_0 が section 上に乗っていることにして) 短完全系列 (1.1) は分裂して、Out ではなく Aut への表現

$$\rho_{F/B,s} : \pi_1(B, b_0) \to \pi_1(F, x_0) \to \mathrm{Aut}\pi_1(X_0, x_0)$$

が定まります (右側の射は、真ん中の群の inner 作用を正規部分群 $\pi_1(X_0, x_0)$ に制限したもの)。

---

[3] $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ は単に、$\bar{K}$ の体としての自己同型のうち K 上では自明に作用するもののなす群。$\bar{K}$ に離散位相を入れて自己同型群にコンパクト開位相を入れると $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ はコンパクト位相群 (実は profinite 群) になることが示せます。

同様に、外ガロア表現でも、section があれば Out でなく Aut への作用がえられます。この場合、section は V 上の K 有理点上に x_0 をとることで得られます。この時の表現は、純粋に関数体と解析接続の言葉で書けますが、去年ここで話させていただきましたので割愛します。

2. 組紐群っぽい群へのガロア群の作用

2.1. 射影直線引く３点. 最も簡単な非アーベル自由群 F_2 （２元生成自由群）を基本群に持つ多様体として、$V := \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}/\mathbb{Q}$ があります。このとき、ガロア表現

$$\rho_{V/\mathbb{Q}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Out}\widehat{F_2}$$

（$\widehat{F_2}$ は F_2 の profinite 完備化）は、驚くべきことに実は単射になります。（Belyĭ[1]。一般に、V が非可換基本群をもつ、コンパクトでない数体上の代数曲線なら単射[9]。）この像を、例えば組み合わせ群論的に特徴づけられたらすごいことです。Belyĭ により、Aut への持ち上げ

$$\rho_{V/\mathbb{Q}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}\widehat{F_2}$$

で、$\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ に対して

$$\sigma : x \mapsto x^{\chi(\sigma)}; \quad y \mapsto f_\sigma(x,y)^{-1} y^{\chi(\sigma)} f_\sigma(x,y)^{-1}$$

と書けるものがあることがわかっています。ここに、x, y は F_2 のある生成元、$\chi(\sigma) \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ は円分指標（一のべき根に σ が何乗で作用するか）、$f_\sigma(x,y)$ は $\widehat{F_2}$ の（位相群としての）交換子群のある元です。Belyĭ の結果から、$\sigma \mapsto (\chi(\sigma), f_\sigma(x,y))$ が単射であることがわかります。

$(\chi(\sigma), f_\sigma(x,y))$ は「(II), (III), (V) サイクル関係」という美しい組み合わせ群論的関係式を満たすことがわかります。（ここでは式を省略させて頂きます。Drinfeld[5]、Deligne[4]、伊原[7] 参照。）これらの関係式を満たす $(\chi, f) \in \widehat{\mathbb{Z}} \times [\widehat{F_2}, \widehat{F_2}]$ によって上の様に書ける $\widehat{F_2}$ の自己同型群全体を Grothendieck-Teichmüller 群と呼び $\widehat{\mathrm{GT}}$ であらわします。定義から $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{\mathrm{GT}}$ ですが、$\widehat{\mathrm{GT}}$ には Drinfeld[5] の導入方法によって quasi-Hopf quasi-triangular category による（ガロア群とは独立な）意味付けがあり、自然に組み紐群 B_n $(n \geq 3)$ の profinite 完備化 $\widehat{B_n}$ に作用します（この形では[8]、Appendix 参照）。当然、合成で得られる

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{\mathrm{GT}} \to \mathrm{Aut}\widehat{B_n}$$

は「組み紐群を基本群とする $\mathbb{Q}$ 上の多様体 V の外ガロア表現」から得られることが期待されます。実際、V としてアファイン平面上の n 点の配置空間をとると、その位相的基本群は組み紐群となり、V 上の適当な section をとる（厳密には tangential point）と、対応する $\rho_{V/\mathbb{Q}}$ が上記の射を与えることが証明できます（伊原－松本[8]）。

他にこんな風に組み紐群みたいな群で、(χ, f) で一部でも外ガロア作用がかけちゃう基本群がないかなーと考えていたところ、アファイン代数曲線 X 上の n 点の配置空間 $F_{0,n}X$ がありました。$F_{0,n}X$ は、X 上の相異なる非順序 n 点をモジュライする空間で次のように定義されます。X 上の順序付き n 点のモジュライは明らかに X^n （X の n 個のコピーの直積）ですが、「相異なる」とするために hyper diagonal $\Delta := \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i = x_j \text{ for some } i \neq j\}$ をぬき、順序を無視するために対称群 S_n （座標の入れ替え）で割って得られます：$F_{0,n}X = (X^n - \Delta)/S_n$ です。$\pi_1^{top}(F_{0,n}X, x_0)$ は、X がアファイン直線（つまり複素平面）であればふつうの n 本糸組み紐群、X の genus が正だと組み紐群と X の基本群が入り交じった群になります。ここで、組み紐群部分へのガロア群の作用が、さきに述べた組み紐群への作用に一致すること、X の

基本群部分への作用は$\rho_{X/K}$で書けることが示され、応用としてBelyĭの単射性定理の一般化が得られました[9]。

今回発表する（つもり）の内容のうちの新しい部分は、組み紐群の仲間として、Artin群をとったときの結果です。半単純リー代数のDynkin図形ごとに、Artin群と呼ばれる組紐群っぽい群があります。これを基本群としてもつ$\mathbb{Q}$上の多様体（Brieskorn[3]参照）をVとすると、やはり対応する外ガロア作用が(χ, f)できれいに書けることを示すことです。（リー代数がA_n型の時には組み紐群となります。）詳しい定義、応用については話の中でふれたいと思います。（というのも、まだ、研究会までにどこまでできるかわからないので。）この多様体の定義だけ簡単にすると、Gを複素半単純リー群、Hを対応する一つのカルタン部分代数、WをHに作用するワイル群（有限鏡映群となる）とし、Hの点集合で、（1以外の）Wの元で固定されるようなもの全体をDとするとき、$(H-D)/W$として与えられます。（要するに、ワイル部屋引く壁をワイル群で割ったもの。）

興味深いのは、H/Wが自然なモジュライ的意味を持った空間であることです。この多様体はDynkin図形に対応する特異点（有理二重点あるいは単純特異点と呼ばれる曲面上の孤立特異点）の半普遍的変形を与え、$(H-D)/W$は丁度特異点のないfiberに対応します。（何の偶然か、必然か、これもGrothendieckが随分昔'65年ごろに予想したことで、Brieskorn[2]が解決しました。）

この結果は、自然なモジュライ的意味を持つ空間の基本群へのガロア作用は、それぞれみな強く結びついているだろうというGrothendieck的思想から見て興味深いものと思われます。（この思想は、例えば織田孝幸氏の予想[11]に具現しています。本研究会の朝田・中村・高尾氏の講演にゆずりますが、この予想は朝田、伊原、金子昌信、中村、織田、高尾、上野亮一、他、の方々の研究の積み重ねによりほぼ解決しています。）

References

1. G.V. Belyĭ, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, Math USSR Izv. **14** (1980), 247-256.
2. E. Brieskorn, Singular elements of semisimple algebraic grops, in: Actes Congrès Intern. Math. 1970, t. 2, 279–284.
3. E. Brieskorn, Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe, Inventiones math. 12, (1971) 57–61.
4. P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points,* in "Galois groups over $\mathbb{Q}$," Publ. MSRI 16 1989, 79–298.
5. V.G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Algebra i Analiz 2 (1990), 114–148; English transl. Leningrad Math. J. 2 (1991), 829–860.
6. A. Grothendieck, "Revêtement Etales et Groupe Fondamental (SGA 1)," Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag 1971.
7. Y. Ihara, *Braids, Galois groups, and some arithmetic functions,* Proceedings of the ICM 90 (I), 1991 99-120.
8. Y. Ihara and M. Matsumoto, *On Galois Actions on Profinite Completions of Braid Groups,* To Appear in AMS Contemporary Math. "Recent Developments in the Inverse Galois Problem." RIMS preprint **961** (1994).
9. M. Matsumoto, *Galois representations on profinite braid groups on curves,* RIMS preprint **987**, (1994).
10. H. Nakamura, *Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus,* To appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo 1 (1994), 71–136.
11. T. Oda, *The universal monodromy representations on the pro-nilpotent fundamental groups of algebraic curves,* Mathematische Arbeitstagung (Neue Serie) 9–15 Juni 1993, Max-Planck-Institute preprint MPI/93-57.

〒606-01 京都市左京区北白川追分町京大数理解析研究所, EMAIL: MATUMOTO@KURIMS.KYOTO-U.AC.JP

3次元多様体の有限被覆に対するη-不変量と Atiyah の 2-framing について

東工大 理　森藤 孝之

0. 準備

3次元の向きづけられた閉リーマン多様体 Mに対するη-不変量は、Atiyah, Patodi, Singer [3] において自己共役な楕円型作用素のスペクトルを用いて定義された。[3] で示されているように、Mのη-不変量は Mを境界として持つ4次元多様体 Wに Hirzebruch の指数定理を適用した際の誤差として解釈できる。

定理. (Atiyah-Patodi-Singer [3]) Wをコンパクトで向きづけられた4次元リーマン多様体で Mを境界として持ち、かつ Mの近くでは $M\times[0,1]$ に等長的とする。この時、$\eta(M)$ は次式で与えられる:

$$\eta(M)=\frac{1}{3}\int_W p_1-\mathrm{Sign}W.$$

ただし、p_1はリーマン計量の第一 Pontrjagin 形式で、$\mathrm{Sign}W$は Wの符号数である。

以下では上式を$\eta(M)$ の定義式と考えることにする。

例1. 3次元球面 S^3の標準計量に関するη-不変量は、$\eta(S^3)=0$.

例2. (Atiyah-Patodi-Singer [4]) S^3の商空間としての3次元レンズ空間 $L(p,q)$ のη-不変量は

$$\eta(L(p,q))=-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\cot(\frac{k}{p}\pi)\cot(\frac{kq}{p}\pi)=-4s(q,p),$$

で与えられる。ただし、$s(q,p)$ は Dedekind sum である。

一方、Atiyah [2] において "2-framing" という概念が導入された。これは閉じた3次元多様体 Mの接バンドルの2倍である $2TM$の Spin(6) バンドルとしての自明化のホモトピー類のことである。それらの中で特に次式を満たす 2-framing t_M を Mの canonical 2-framing と呼ぶ:

$$\frac{1}{6}p_1(2TW,t_M)=\mathrm{Sign}W.$$

ここで、$p_1(2TW,t_M)$ は Wの境界である Mの自明化を 2-framing t_Mで与えることにより決まる相対 Pontrjagin 数である。

また 2-framing αの "difference degree" を次のように定義する。

$$d(\alpha;t_M)=\frac{1}{2}p_1(2TW,\alpha)-3\mathrm{Sign}W\in\mathbf{Z}.$$

これは 2-framing αの canonical 2-framing t_Mからのずれを整数値ではかるものである。

1. 有限被覆に対するη-不変量

次の状況を考える。$\pi : \tilde{M} \to M$を n 重リーマン被覆とする。

$$\begin{tikzcd}
2T\tilde{M} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "t_{\tilde{M}}"'] & 2TM \arrow[d, "t_M"] \\
\tilde{M} \arrow[r, "\pi"'] \arrow[u, bend left=60] & M \arrow[u, bend right=60]
\end{tikzcd}$$

ただし、$\tilde{\pi}$ は π のリフトである。この時、次の主張を得る。

命題1. 3次元多様体の有限被覆に対するη-不変量の重複度からのずれは、$M, \tilde{M}$各々の canonical 2-framing のずれとして解釈できる:

$$\eta(\tilde{M}) = n\eta(M) + \frac{1}{3}d(\pi^* t_M ; t_{\tilde{M}}) \quad (\pi^* t_M : t_M\text{のリフト}).$$

特に、$\tilde{M}$が向き反転自己等長写像を持つ場合には、定義から$\eta(\tilde{M}) = 0$ となり、$\eta(M)$ と d を計算することが同値になる。

例3. 標準計量に関する p 重被覆 $S^3 \to L(p, q)$ に命題1を適用すると、S^3の canonical 2-framing t_{S^3}が位数 p の有限巡回群の作用で不変である必要十分条件が $q^2 \equiv -1 \pmod p$ であることがわかる。

2. 写像トーラスの difference degree

3次元多様体として、特に写像トーラス M_φに対しては、difference degree を直接計算できる。種数 gの向きづけられた閉曲面Σ_gの写像類群 $\mathcal{M}_g$の中心拡大

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g \longrightarrow 1$$

を考える。ここで、$\hat{\mathcal{M}}_g = \{(\varphi, \alpha) : \varphi \in \mathcal{M}_g,\ \alpha : M_\varphi\text{の } 2-\text{framing}\}$ である。この時、section $s : \mathcal{M}_g \to \hat{\mathcal{M}}_g$, $s(\varphi) = (\varphi, t_\varphi)$ $(\varphi \in \mathcal{M}_g,\ t_\varphi : M_\varphi$ の canonical 2-framing) を用いて、この中心拡大の canonical 2-cocycle を

$$c(\varphi, \psi) = s(\varphi)s(\psi)\{s(\varphi\psi)\}^{-1} \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{M}_g)$$

と定義する ([2],[5])。これは写像類群 $\mathcal{M}_g$の元 φ, ψ に対し、これらによって定まる2つの 2-framing $s(\varphi)s(\psi)$ と $s(\varphi\psi)$ の3次元多様体 $M_{\varphi\psi}$上での整数の差を対

応させるものである。この時、写像トーラス M_φの有限被覆 $M_{\varphi^n} \to M_\varphi$ に対して次の主張を得る。

命題2. $\varphi \in \mathcal{M}_g$に対し、$f_n : M_{\varphi^n} \to M_\varphi$を n 重被覆とすると difference degree は次式で与えられる。

$$d(f_n{}^* t_\varphi; t_{\varphi^n}) = \sum_{k=1}^{n-1} c(\varphi, \varphi^k).$$

命題1，2より、写像トーラスに対するη-不変量の公式が得られる。

主定理. $\varphi \in \mathcal{M}_g$を有限位数 m の元とする。この時、写像トーラス M_{φ^n} $(1 \leq n \leq m)$ のη-不変量$\eta(M_{\varphi^n})$ は次式で与えられる。

$$\eta(M_{\varphi^n}) = \frac{1}{3}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} c(\varphi, \varphi^k) - \frac{n}{m}\sum_{k=1}^{m-1} c(\varphi, \varphi^k)\right\}.$$

ただし、M_{φ^n}の計量は φ を実現する向き保存微分同相写像のΣ_gへの作用が等長的となるようなΣ_gの計量と、S^1の標準計量との積計量から誘導されるものとする。

例4. Hyperelliptic involution $\varphi : \Sigma_g \to \Sigma_g$.
$M_{\varphi^2} = \Sigma_g \times S^1 \to M_\varphi$ に対して、主定理から直ちに $\eta(M_\varphi) = 0$ が従う。

例5. トーラスバンドル $(g = 1)$ の場合.
canonical 2-cocycle $c(\varphi, \psi)$ と Meyer の signature cocyle $\tau(\varphi, \psi)$ の関係から、

$$d(f_n{}^* t_A; t_{A^n}) = -3\sum_{k=1}^{n-1} \tau(A, A^k) \quad (A \in SL(2, \mathbf{Z})).$$

これを用いて $SL(2,\mathbf{Z})$ の有限位数の元（つまり、$|\mathrm{tr}A| < 2$）に対して、それに対応したトーラスバンドルのη-不変量を求めることができる。

(1) $\mathrm{tr}A = 1$ (位数 6). $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\eta(M_A) = -\eta(M_{A^5}) = -\frac{4}{3},\ \eta(M_{A^2}) = -\eta(M_{A^4}) = -\frac{2}{3},\ \eta(M_{A^3}) = \eta(M_{A^6}) = 0.$$

(2) $\mathrm{tr}A = 0$ (位数 4). $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\eta(M_A) = -\eta(M_{A^3}) = -1, \quad \eta(M_{A^2}) = \eta(M_{A^4}) = 0.$$

(3) $\mathrm{tr}A = -1$ (位数 3). $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\eta(M_A) = -\eta(M_{A^2}) = -\frac{2}{3}, \quad \eta(M_{A^3}) = 0.$$

これらの値は、Atiyah [1] でも計算されている。

参考文献

[1] M. F. Atiyah, *The logarithm of the Dedekind η-function*, Math. Ann. **278** (1987), 335–380

[2] M. F. Atiyah, *On framings of 3-manifolds*, Topology **29** (1990), 1–7

[3] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69

[4] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer *Spectral asymmetry and Riemannian geometry II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78** (1975), 405–432

[5] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. **201** (1973), 239–264